

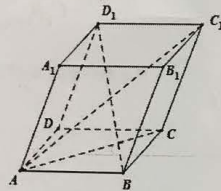
六安一中 2024 届高三年级第四次月考 数学试卷

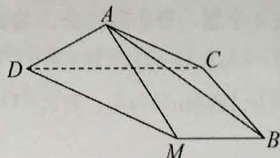
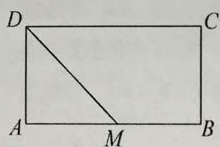
时间：120 分钟

满分：150 分

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$ ，则 $z - \bar{z} =$ ()
 A. $-i$ B. i C. 0 D. 1
2. 设 $x, y \in \mathbb{R}$ ， $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ， $\vec{b} = (1, y, z)$ ， $\vec{c} = (x, -4, 2)$ ，且 $\vec{a} \perp \vec{c}$ ， $\vec{b} \parallel \vec{c}$ ，则 $|2\vec{a} + \vec{b}| =$ ()
 A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$
3. 关于圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 有四个命题：①点 $A(1, -3)$ 在圆内；②点 $B(2, 3)$ 在圆上；③圆心为 $(-1, 0)$ ；④圆的半径为 3。若只有一个假命题，则该命题是 ()
 A. ① B. ② C. ③ D. ④
4. 已知 $\triangle ABC$ 的三内角 A 、 B 、 C 所对的边分别是 a 、 b 、 c ，设向量 $\vec{m} = (a, b)$ ， $\vec{n} = (\sin B, \sin A)$ ，若 $\vec{m} \parallel \vec{n}$ ，且满足 $(2a - c)\cos B = b\cos C$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
 A. 等腰直角三角形 B. 等边三角形
 C. 钝角三角形 D. 直角非等腰三角形
5. 如图所示，平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，以顶点 A 为端点的三条棱长都为 1，且两两夹角为 60° 。则 BD_1 与 AC 夹角的余弦值是 ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$
6. 表面积为 20π 的球的表面上有四个点 P, A, B, C ，满足 $PA = 2, PA \perp$ 平面 $ABC, AC \perp BC$ ，则三棱锥 $P - ABC$ 的体积的最大值为 ()
 A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{16}{3}$ D. 8
7. 在平面直角坐标系 xOy 中， $A(-1, 0), B(2, 0)$ ，若直线 $x - 2y + m = 0$ 上存在点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$ ，则 m 的取值范围是 ()
 A. $[2 - 2\sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5}]$ B. $[3, 2 + \sqrt{5}]$ C. $[2 - 2\sqrt{5}, 3]$ D. $[2 - \sqrt{5}, 3 + 2\sqrt{5}]$
8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2, AD = 1, M$ 为 AB 的中点，将 $\triangle ADM$ 沿 DM 翻折。在翻折过程中，当二面角 $A - BC - D$ 的平面角最大时，其正切值为 ()





- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 下列命题中错误的是 ()

- A. 若直线 l 的一个方向向量是 $\vec{a} = (2, 1, 3)$ ，平面 α 的一个法向量是 $\vec{n} = (-2, 1, 1)$ ，则 $l \parallel \alpha$
 B. 已知用斜二测画法画出的 $\triangle ABC$ 的直观图 $\triangle A'B'C'$ 是边长为 2 的正三角形，那么 $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{\sqrt{6}}{4}$
 C. 若空间中有 $n (n \geq 3, n \in \mathbb{Z})$ 条直线，其中任意两条相交，则这 n 条直线共面
 D. 若向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 3$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$ ，则 \vec{b} 在 \vec{a} 方向上的投影向量为 $-\frac{2}{3}\vec{a}$

10. 下列结论正确的是 ()

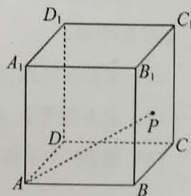
- A. $a = -1$ 是直线 $a^2x - y - 1 = 0$ 与直线 $x - ay + 1 = 0$ 互相垂直的充分不必要条件
 B. 已知两点 $A(-3, 4)$ ， $B(3, 2)$ ，直线 $l: ax + y - a = 0$ ，若直线 l 与线段 AB 有公共点，则直线 l 的斜率的取值范围是 $[-1, 1]$
 C. 已知直线的斜率 $k \geq -\sqrt{3}$ ，则其倾斜角的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi)$
 D. 已知 $A(-1, 2)$ ， $B(2, -2)$ ， $C(3, 5)$ ，则 $\angle BAC$ 的角平分线所在直线的方程是 $x + 7y - 13 = 0$

11. 已知圆的圆心在直线 $x = 2$ 上，且与 $l: x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ 相切于点 $P(1, \sqrt{3})$ ，过点 $Q(1, 0)$ 作圆的两条互相垂直的弦 AB, CD 。记线段 AB, CD 的中点分别为 M, N ，则下列结论正确的是 ()

- A. 圆的方程为 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ B. 四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $\frac{7}{2}$
 C. 弦 AB 的长度的取值范围为 $[2, 4]$ D. 直线 MN 恒过定点 $(\frac{3}{2}, 0)$

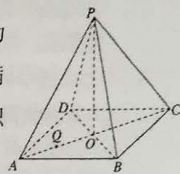
12. 如图，点 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的表面上一个动点，则 ()

- A. 当 P 在平面 BCC_1B_1 上运动时，三棱锥 $P - AA_1D$ 的体积为定值 $\frac{4}{3}$
 B. 当 P 在线段 AC 上运动时， D_1P 与 A_1C_1 所成角的取值范围是 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$
 C. 若 F 是 A_1B_1 的中点，当 P 在底面 $ABCD$ 上运动，且满足 $PF \perp BD_1$ 时， PF 长度的最小值是 $\sqrt{6}$
 D. 使直线 AP 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° 的点 P 的轨迹长度为 $\pi + 4\sqrt{2}$



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若直线 $l_1: x+ay+9=0$ 与 $l_2: (a-2)x+3y+3a=0$ 平行，则 l_1, l_2 间的距离是_____.
14. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_3=13$ ，且 $a_5=a_4+6a_3$ ，则满足 $S_n < 123$ 的 n 的最大值为_____.
15. 已知 $\odot O_1: x^2+(y-2)^2=1, \odot O_2: (x-3)^2+(y-4)^2=4$ ，过 x 轴上一点 P 分别作两圆的切线，切点分别是 M, N ，则 $|PM|+|PN|$ 的最小值是_____.
16. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形， P 在底面的射影为正方形的中心 O ， $PO=4$ ， Q 点为 AO 中点. 点 T 为该四棱锥表面上一个动点，满足 PA, BD 都平行于过 QT 的四棱锥的截面，则动点 T 的轨迹围成的多边形的面积为_____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

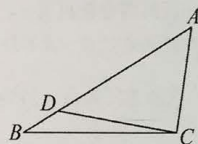
已知圆 C 的圆心在直线 $x-y-3=0$ 上，且该圆经过点 $A(0,4), B(3,5)$.

- (1) 求圆 C 的标准方程;
- (2) 若点 D 在圆 C 上，且弦 AD 长为 8，求直线 AD 的方程.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $\sin B + \sqrt{3} \cos B = 2$.

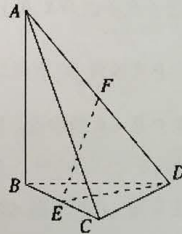
- (1) 求 B ;
- (2) 已知 $BC = 2\sqrt{3}$ ， D 为边 AB 上的一点，若 $BD=1, \angle ACD = \frac{\pi}{2}$ ，求 AC 的长.



19. (本小题满分 12 分)

如图，四面体 $ABCD$ 中， AB, BC, BD 两两垂直， $AB = BC = BD = 4$ ， E, F 分别为棱 BC, AD 的中点.

- (1) 求异面直线 AB 与 EF 所成角的余弦值;
- (2) 求 E 到平面 ACD 的距离;
- (3) 求 EF 与平面 ACD 所成角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差 $d \neq 0$, 且 $S_3 + S_5 = 50$, a_1, a_4, a_9 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{2b_n}{a_n - 1} = 3^n$, 且不等式 $\lambda b_n - S_n + 2n^2 \leq 0$ 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 求实数 λ 的最

大值.

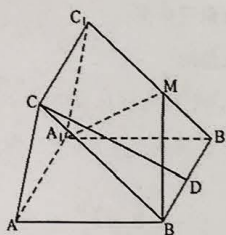
21. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 四边形 ABB_1A_1 为正方形, 四边形 AA_1C_1C 为菱形, 且 $\angle AA_1C = 60^\circ$, 平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 点 D 为棱 BB_1 的中点.

(1) 求证: $AA_1 \perp CD$;

(2) 棱 B_1C_1 (除两端点外) 上是否存在点 M , 使得二面角 $B - A_1M - B_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$, 若存在,

请求出 $\frac{C_1M}{C_1B_1}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



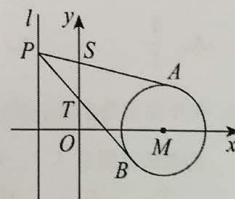
22. (本小题满分 12 分)

如图, 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, 点 $P(-1, t)$ 为直线 $l: x = -1$ 一动点, 过点 P 引圆 M 的两条切线, 切点分别为 A, B .

(1) $t = 1$ 时, 求 PA, PB 方程 (点 A 在点 B 上方);

(2) 求线段 AB 中点的轨迹方程;

(3) 若两条切线 PA, PB 与 y 轴分别交于 S, T 两点, 求 $|ST|$ 的最小值.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

