

秘密 ★ 启用前 【考试时间：2023 年 10 月 31 日 15:00—17:00】

绵阳市高中 2021 级第一次诊断性考试

文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x<0\}$ ，集合 $B=\{x|x^2>1\}$ ，则 $A\cap B=$
A. $(-1, 0)$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-1, 1)$
2. 如果 x, y 是实数，那么“ $\sin x=\cos y$ ”是“ $x+y=\frac{\pi}{2}$ ”的（ ）
A. 充分必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知平面向量 a 与 b 的夹角为 45° ， $a\cdot b=2$ ，且 $|a|=2$ ，则 $(a-b)(a+b)=$
A. $-2\sqrt{2}$ B. -2 C. 2 D. $2\sqrt{2}$
4. 已知 $a>b>0$ ，则下列关系式正确的是
A. 若 $c>0$ ，则 $a^c > b^c$ B. 若 $c>0$ ，则 $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$
C. 若 $c>0$ 且 $c\neq 1$ ，则 $c^a > c^b$ D. 若 $c<0$ ，则 $|ac|<|bc|$
5. 已知 $5^a=10^b$ ，则 $\frac{b}{a}=$
A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\log_5 10$ D. $1-\lg 2$

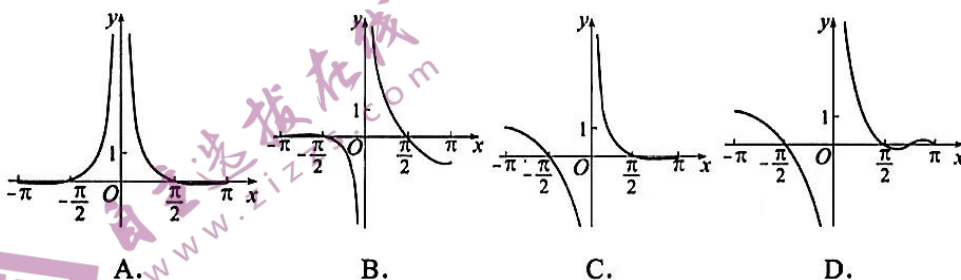
6. 已知 $\tan \alpha = -2$, 则 $\sin 2\alpha =$

- A. $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{7}{10}$

7. 若等比数列 $\{a_n\}$ 首项 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_4 = 8\sqrt{2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

- A. $\sqrt{2}(2^n - 1)$ B. $\sqrt{2}(1 - 2^n)$ C. $\frac{\sqrt{2}[(-2)^n - 1]}{3}$ D. $2\sqrt{2}(2^n - 1)$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{\cos x}{e^x - 1}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$, 且 $x \neq 0$), 则其大致图象为



9. 若曲线 $f(x) = ax - \ln x$ 与直线 $x - 2y + 2 - 2\ln 2 = 0$ 相切, 则实数 $a =$

- A. -1 B. 1 C. 2 D. e

10. 命题 p : “若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 满足: $AB = DE = x$, $BC = EF = 2$, $A = D = \frac{\pi}{6}$, 则 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ”. 已知 p 是真命题, 则 x 的值不可以是

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. 4

11. 从社会效益和经济效益出发, 某企业追加投入资金进行新兴产业进一步优化建设.

根据规划, 本年度追加投入 4000 万元, 以后每年追加投入将比上年减少 $\frac{1}{4}$, 本年度企业在新兴产业上的收入估计为 2000 万元, 由于该项建设对新兴产业的促进作用, 预计今后的新兴产业收入每年会比上一年增加 1000 万元, 则至少经过() 年新兴产业的总收入才会超过追加的总投入.

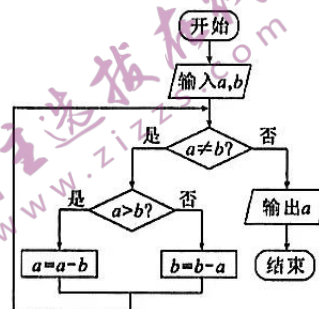
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

12. 已知函数 $f(x) = 4\cos(\omega x - \frac{\pi}{12})$ ($\omega > 0$), $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上的最小值恰为

- $-\omega$, 则所有满足条件的 ω 的积属于区间
A. (1, 4] B. [4, 7] C. (7, 13) D. [13, +∞)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. “更相减损术”的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》. 该算法的程序框图如图所示，若输入的 a, b 分别为 21, 14, 则输出的 $a =$ _____.



14. 已知点 $M(-1, 1), N(-2, m)$, 若向量 \overrightarrow{MN} 与 $a=(m, -2)$ 的方向相同, 则 $|a| =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-x} - 2, & x \geq 0, \\ x^2 + 2x, & x < 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的值域为 _____.

16. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x) = f(x+6), f(2-x) + g(x) = 4$, 若 $g(x+1)$ 为奇函数, $f(2) = 3$, 则 $g(30) =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_1, 2S_2, 3S_3$ 成等差数列, $a_1 = 27$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 T_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n 的最大值.

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = \tan(\frac{3}{8}x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 满足 $f(\frac{\pi}{3}) = 1$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式及最小正周期;
- (2) 函数 $y = g(x)$ 的图象是由函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 λ ($\lambda > 0$) 个单位长度得到, 若 $g(\frac{\pi}{4}) = -f(0)$, 求 λ 的最小值.

19. (12 分)

函数 $f(x) = (2x^2 + m)(x - m + 2)$.

- (1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 求实数 m 的值;
- (2) 已知 $f(x)$ 仅有两个零点, 证明: 函数 $y = f(x) - 3$ 仅有一个零点.

20. (12分)

在斜三角形 ABC 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\cos(C-B)\sin A = \cos(C-A)\sin B$.

(1) 证明: $A=B$;

(2) 若 $\frac{1}{c} = \sin B$, 求 $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}$ 的最小值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^{x-1} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - ax$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;

(2) 试讨论 $f(x)$ 的极值点个数.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10分)

已知曲线 C_1, C_2 的参数方程分别为 $C_1: \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$ (t 为参数), $C_2: \begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$

(α 为参数).

(1) 将 C_1, C_2 的参数方程化为普通方程;

(2) 以坐标原点 O 为极点, 以 x 轴的非负半轴为极轴, 建立极坐标系, 若射线: $\theta = \frac{\pi}{6}$

与曲线 C_1, C_2 分别交于 A, B 两点 (异于极点), 点 $P(2, 0)$, 求 $\triangle PAB$ 的面积.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |3x+3| - |x-5|$.

(1) 求不等式 $f(x) > 0$ 的解集 M ;

(2) 若 m 是 $f(x)$ 的最小值, 且正数 a, b, c 满足 $a+b+c+m=0$, 证明:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{3}{4}.$$