高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、复数。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $\frac{3+i}{z}=1-i$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

2. 设集合 $A=\{x|y=\ln(x-3)\}$，$B=\{x|x\leqslant -1\}$，则 $\{x|-1<x\leqslant 3\}=$

A. $\complement_{R}(A\cap B)$　　B. $\complement_{R}(A\cup B)$　　C. $A\cap(\complement_{R}B)$　　D. $A\cup(\complement_{R}B)$

3. 已知 $P(\sin\theta,\cos\theta)$ 是角 $-\frac{\pi}{3}$ 的终边上一点，则 $\tan\theta=$

A. $-\sqrt{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和实数 λ，则"$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$"是"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 扇子是引风用品，夏令必备之物. 我国传统扇文化源远流长，是中华文化的一个组成部分. 历史上最早的扇子是一种礼仪工具，后来慢慢演变为纳凉、娱乐、观赏的生活用品和工艺品. 扇子的种类较多，受大众喜爱的有团扇和折扇. 如图 1 是一把折扇，是用竹木做扇骨，用特殊纸或绫绢做扇面而制成的. 完全打开后的折扇为扇形(如图 2)，若图 2 中 $\angle AOB=\theta$，C，D 分别在 OA，OB 上，$AC=BD=m$，$\overset{\frown}{AB}$ 的长为 l，则该折扇的扇面 $ABDC$ 的面积为

图 1

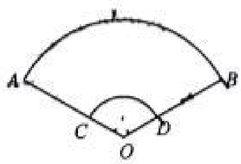


图 2

A. $\frac{m(l-\theta)}{2}$　　B. $\frac{m(l-\theta m)}{2}$　　C. $\frac{m(2l-\theta)}{2}$　　D. $\frac{m(2l-\theta m)}{2}$

6. 已知 $a=\left(\frac{3}{2}\right)^{-0.6}$，$b=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}$，$c=\left(\frac{2}{3}\right)^{0.9}$，则

A. $b>c>a$　　B. $c>a>b$　　C. $b>a>c$　　D. $a>c>b$

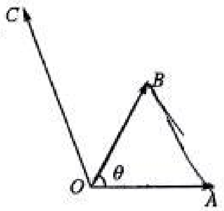
7. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\frac{1}{2}$，若将其图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后所得到的图象关于原点对称，则 φ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

8. $\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

9. 如图，已知两个单位向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 和向量 $\overrightarrow{OC}$，$|\overrightarrow{OC}|=2$. $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 θ，且 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 45°，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ $(x,y\in\mathbf{R})$，则 $x+y=$



A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$

C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 上一点，$\angle BAD=\angle CAD$，若 $AC=AD=\frac{1}{2}AB=2$，则 $BC=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{5}$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，其导函数为 $f'(x)$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(4+x)-f(-x)=0$，且 $f(x+1)$ 为奇函数，若 $f'(1)=-1$，则 $f(1)+f'(2)+f'(2\ 023)=$

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

12. 已知函数 $f(x)=(\ln x)^2-\frac{a}{2}x\ln x+\frac{a}{e}x^2$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则 a 的取值范围是

A. $\left(-\frac{1}{e^2-e},\right.$　　B. $\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2e},0\right)$　　D. $\left(-\frac{2}{e},0\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，若 $(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $k=$________.

14. 已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为________.

15. 函数 $y=\frac{\sin x-\cos x}{2-\sin x\cos x}$ 的值域为________.

16. 函数 $f(x)=(x^2-6x)\sin(x-3)+x+a$ $(x\in[0,6])$ 的最大值为 M，最小值为 m，若 $M+m=8$，则 $a=$________.

三、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分10分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos^2 x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\cos x\right)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间；

(2)在△ABC 中，$A+B=\frac{7}{12}\pi$，$f(A)=1$，$BC=2\sqrt{3}$，求边 AC 的长.

18.（本小题满分12分）

已知 $f(x)=\log_3(m^x+1)-x$（$m>0$，且 $m\neq1$）是偶函数.

(1)求 m 的值；

(2)若关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}\cdot3^{f(x)}-3[(\sqrt{3})^x+(\sqrt{3})^{-x}]+a\leqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解，求实数 a 的最大整数值.

19.（本小题满分12分）

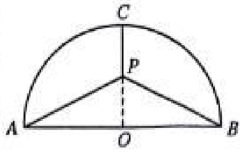
已知 $\sin\alpha$ 是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根.

(1)求 $\dfrac{\sin\left(-\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)\cdot\tan(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$ 的值；

(2)若 α 是第四象限角，$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{13}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin\left(\beta-\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

20.(本小题满分 12 分)

南京玄武湖号称“金陵明珠”，是我国仅存的皇家园林湖泊.在玄武湖的一角有大片的荷花，每到夏季，荷花飘香，令人陶醉.夏天的一个傍晚，小胡和朋友游玄武湖，发现观赏荷花只能在岸边，无法深入其中，影响观赏荷花的乐趣，于是他便有了一个愿景：若在玄武湖一个盛开荷花的一角(该处岸边近似半圆形，如图所示)设计一些栈道和一个观景台，观景台 P 在半圆形的中轴线 OC 上(图中 OC 与直径 AB 垂直，P 与 O，C 不重合)，通过栈道把 PA，PB，PC，AB 连接起来，使人行在其中，犹如置身花海之感.已知 $AB=200$ m，$\angle PAB=\theta$，栈道总长度为函数 $f(\theta)$.



(1)求 $f(\theta)$；

(2)若栈道的造价为每米 5 万元，试确定观景台 P 的位置，使实现该愿景的建造费用最小(观景台的建造费用忽略不计)，并求出实现该愿景的建造费用的最小值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-\sin x-\cos x$，$f'(x)$ 为其导函数.

(1)求 $f(x)$ 在 $[-\pi,+\infty)$ 上极值点的个数；

(2)若 $f'(x)\geqslant ax+2-2\cos x(a\in\mathbf{R})$ 对 $\forall x\in[-\pi,+\infty)$ 恒成立，求 a 的值.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由 $\frac{3+\mathrm{i}}{z}=1-\mathrm{i}$，得 $z=\frac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{2+4\mathrm{i}}{2}=1+2\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. 故选 A.

2. B　由题意得 $A=\{x|x>3\}$，所以 $A\cap B=\varnothing$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\mathbf{R}$，故 A 错误；$A\cup B=\{x|x\leqslant -1$，或 $x>3\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|-1<x\leqslant 3\}$，故 B 正确；又 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x>-1\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x>3\}$，故 C 错误；$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x>-1\}$，故 D 错误. 故选 B.

3. B　$\sin\theta=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

4. A　若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，由共线向量定理知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则"$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$"是"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线"的充分条件；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，如 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(0,0)$，则 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 不成立，故"$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$"不是"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线"的必要条件. 综上，"$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$"是"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线"的充分不必要条件. 故选 A.

5. D　由弧长公式可知，$l=\theta\cdot OA$，所以 $OA=\frac{l}{\theta}$，则 $OC=\frac{l}{\theta}-m$，所以该折扇的扇面的面积为 $\frac{1}{2}l\cdot\frac{l}{\theta}-\frac{1}{2}\theta\cdot\left(\frac{l}{\theta}-m\right)^2=\frac{m(2l-m\theta)}{2}$. 故选 D.

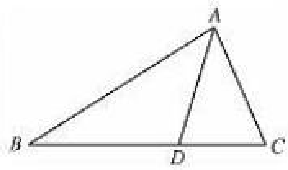
6. C　$1=\left(\frac{3}{2}\right)^0>\left(\frac{3}{2}\right)^{-0.6}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0.6}>\left(\frac{2}{3}\right)^{0.9}$，即 $1>a>c$，又 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}=\log_3 4>1$，所以 $b>a>c$. 故选 C.

7. A　因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，将其图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后得到的图象为函数 $y=\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，因为 $y=\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象关于原点对称，所以 $2\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，由于 $\varphi>0$，当 $k=0$ 时，φ 取得最小值 $\frac{\pi}{12}$. 故选 A.

8. C　$\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}+4\sin 20^\circ=\frac{\sin 20^\circ+4\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ+2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ+2\sin(60^\circ-20^\circ)}{\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ+\sqrt{3}\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}$. 故选 C.

9. D　由 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\theta\in[0,\pi]$，得 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$. 由题意，得 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times 2\cos 45^\circ=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times 2\cos(\theta+45^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{5}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}$，在 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 两边分别点乘 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=x+\frac{3}{5}y$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}x+y$，两式相加，得 $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{8}{5}(x+y)$，所以 $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 D.

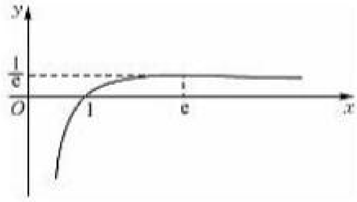
10. C　设 $\angle BAC=\theta$，由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BAD}+S_{\triangle CAD}$，得 $\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\theta=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\frac{\theta}{2}$，即 $2\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}$，所以 $4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=3\sin\frac{\theta}{2}$，因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\sin\frac{\theta}{2}\neq 0$，所以 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}$，所以 $\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{1}{8}$，所以 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\theta=16+4-2\times 4\times 2\times\frac{1}{8}=18$，所以 $BC=3\sqrt{2}$. 故选 C.



11. A　法一：因为 $f(x+1)$ 为奇函数，即 $f(-x+1)=-f(x+1)$，令 $x=0$ 得 $f(1)=0$，两边求导，得 $f'(-x+1)\cdot(-1)=-f'(x+1)$，即 $f'(-x+1)=f'(x+1)$，所以 $f'(x)=f'(2-x)$，又由 $f(4+x)-f(-x)=0$，两边求导，得 $f'(4+x)+f'(-x)=0$，所以 $f'(2)=0$，$f'(x+2)=-f'(2-x)=-f'(x)$，所以 $f'(x+4)=f'(x)$，故 $f'(x)$ 的周期为 4，所以 $f(1)+f'(2)+f'(2\,023)=0+0+f'(-1)=-f'(1)=1$. 故选 A.

法二：由法一，得 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 和 $x=2$ 对称，且周期为 4，取 $f(x)=\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x$，则 $f'(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x\right)=-\sin\frac{\pi}{2}x$，于是 $f(1)+f'(2)+f'(2\,023)=\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\pi-\sin\frac{2\,023\pi}{2}x=1$. 故选 A.

12. D　由题意知 $x>0$，所以 $f(x)=0$ 可化为 $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2-\frac{a}{2}\cdot\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{e}=0$，令 $u=g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以当 $0<x<e$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增；当 $x>e$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)_{max}=g(e)=\frac{1}{e}$，又 $x\to0$ 时，$g(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，故 $g(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$，且其图象如图所示.



则问题转化为 $h(u)=u^2-\frac{a}{2}u+\frac{a}{e}$ 的零点：①一个在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 内，另一个为 $\frac{1}{e}$，则 $\begin{cases}\Delta>0,\\ h(0)>0,\\ h\left(\frac{1}{e}\right)=0,\\ 0<\frac{a}{4}<\frac{1}{e},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{a^2}{4}-\frac{4a}{e}>0,\\ \frac{a}{e}>0,\\ \frac{1}{e^2}-\frac{a}{2e}+\frac{a}{e}=0,\\ 0<a<\frac{4}{e},\end{cases}$ 无解. ②一个在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 内，另一个在 $(-\infty,0]$ 内，若 $h(0)=0$，则 $a=0$，$h(u)=u^2$，函数 $h(u)$ 有一个零点，不合题意，则 $\begin{cases}h(0)<0,\\ h\left(\frac{1}{e}\right)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{a}{e}<0,\\ \frac{1}{e^2}-\frac{a}{2e}+\frac{a}{e}>0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{2}{e}<a<0$. 故选 D.

13. $\frac{4}{5}$　因为 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos120°=5\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-10$. 由 $(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，得 $(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2+(k-2)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=25k-2\times16-10(k-2)=15k-12=0$，解得 $k=\frac{4}{5}$.

14. $2x-y-1=0$　$f'(x)=\frac{e^x-(x-1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{2-x}{e^x}$，所以 $f'(0)=2$，又 $f(0)=-1$，故所求切线方程为 $y-(-1)=$

$2(x-0)$，即 $2x-y-1=0$.

15\. $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5}\right]$　令 $t=\sin x-\cos x$，则 $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，所以 $y=\frac{2t}{3+t^2}(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，当 $t=0$ 时，$y=0$，当 $-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，且 $t\neq0$ 时，$y=\frac{2}{t+\frac{3}{t}}$，令 $u=t+\frac{3}{t}$，易知 u 的值域为 $\left(-\infty,-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{5\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，所以 y 的取值范围为 $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5},0\right)\cup\left(0,\frac{2\sqrt{2}}{5}\right]$. 综上所述，所求函数的值域为 $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5}\right]$.

16\. 1　$f(x)=(x^2-6x)\sin(x-3)+x+a=[(x-3)^2-9]\sin(x-3)+x+a$，令 $t=x-3(t\in[-3,3])$，则原函数变为 $y=(t^2-9)\sin t+t+3+a$，令 $g(t)=(t^2-9)\sin t+t(t\in[-3,3])$，所以 $y=g(t)+3+a$，所以 $M=g(t)_{\max}+3+a$，$m=g(t)_{\min}+3+a$，所以 $M+m=g(t)_{\max}+g(t)_{\min}+6+2a$. 因为 $g(-t)=-g(t)$，所以 $g(t)$ 为奇函数. 所以 $g(t)_{\max}+g(t)_{\min}=0$，所以 $M+m=6+2a=8$，解得 $a=1$.

17\. 解：(1)由题意得 $f(x)=\cos^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，…………………… 2分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，…………………… 3分

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，…………………… 4分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. …………………… 5分

(2)由(1)知 $f(A)=\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=1$，

所以 $\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $2A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$，所以 $2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………… 7分

因为 $A+B=\frac{7}{12}\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$. …………………… 8分

由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，所以 $AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{2}$. …………………… 10分

18\. 解：(1)因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

即 $\log_3(m^{-x}+1)+x=\log_3(m^x+1)-x$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，…………………… 2分

又 $\log_3(m^{-x}+1)=\log_3\frac{m^x+1}{m^x}=\log_3(m^x+1)-\log_3m^x=\log_3(m^x+1)-x\log_3m$，

所以 $\log_3(m^x+1)-x\log_3m+x=\log_3(m^x+1)-x$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，…………………… 4分

即 $x(\log_3m-2)=0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

必须 $\log_3m-2=0$，即 $m=9$.

故 $m=9$. …………………… 6分

(2)由(1)知，$f(x)=\log_3(9^x+1)-x$，

故 $3^{f(x)}=3^{\log_3(9^x+1)-x}=3^x+\frac{1}{3^x}$. …………………… 7分

设 $t=(\sqrt{3})^x+(\sqrt{3})^{-x}(t\geqslant2)$，则 $t^2=3^x+\frac{1}{3^x}+2$，即 $3^x+\frac{1}{3^x}=t^2-2$，

所以原问题等价于关于 t 的不等式 $\frac{1}{\ }t^2-3t+a-1<0$ 在 $[2,+\infty)$ 上有解

所以原问题等价于关于 t 的不等式 $\frac{1}{2}t^2-3t+a-1\leqslant 0$ 在 $[2,+\infty)$ 上有解，

所以 $a\leqslant\left(-\frac{1}{2}t^2+3t+1\right)_{\max}$. ………… 9 分

又 $y=-\frac{1}{2}t^2+3t+1=-\frac{1}{2}(t-3)^2+\frac{11}{2}$，$t\in[2,+\infty)$， ………… 10 分

所以当 $t=3$ 时，$y_{\max}=\frac{11}{2}$，

所以 $a\leqslant\frac{11}{2}$，故实数 a 的最大整数值为 5. ………… 12 分

19. 解：(1) 由 $\sin\alpha$ 是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根，可得 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ 或 $\sin\alpha=2$（舍）， ………… 1 分

原式 $=\dfrac{-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\times\cos\alpha\times(-\tan\alpha)}{\sin\alpha\times(-\sin\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha(-\sin\alpha)\cos\alpha(-\tan\alpha)}{-\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{-\sin^2\alpha}=-\cos\alpha$. ………… 3 分

由 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，知 α 是第三象限角或第四象限角，

若 α 是第三象限角，则 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，此时 $-\cos\alpha=\frac{4}{5}$； ………… 4 分

若 α 是第四象限角，则 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，此时 $-\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. ………… 5 分

故所求式子的值为 $\frac{4}{5}$ 或 $-\frac{4}{5}$. ………… 6 分

(2) 由 (1) 知，当 α 是第四象限角时，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$， ………… 7 分

由 $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{13}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{12}{13}$. ………… 8 分

所以 $\sin\left(\beta-\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\left(\beta-\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left[\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)-\alpha\right]$ ………… 10 分

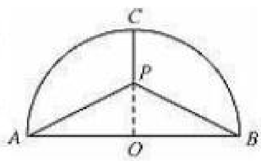
$=\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\cos\alpha+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{33}{65}$. ………… 12 分

20. 解：(1) 由题意知 $\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$，$OC\perp AB$，$OA=OB=100$， ………… 1 分

则 $PA=PB=\frac{100}{\cos\theta}$，$PO=100\tan\theta$，所以 $PC=100-100\tan\theta$， ………… 3 分

所以 $f(\theta)=PA+PB+PC+AB=\frac{200}{\cos\theta}+100-100\tan\theta+200=100\left(\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+3\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$. ………… 4 分

(2) 建造栈道的费用 $F(\theta)=5f(\theta)=500\left(\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+3\right)$， ………… 5 分



$F'(\theta)=500\times\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$， ………… 6 分

令 $F'(\theta)=0$，得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，又 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$. ………… 7 分

当 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$ 时，$F'(\theta)<0$，当 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时，$F'(\theta)>0$，

所以 $F(\theta)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增. ………………………… 9 分

所以 $F(\theta)_{\min}=F\left(\frac{\pi}{6}\right)=500(3+\sqrt{3})$，此时 $PC=100-100\tan\frac{\pi}{6}=100-\frac{100\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 11 分

故观景台位于离岸边半圆弧中点的距离为 $\left(100-\frac{100\sqrt{3}}{3}\right)$ 米时，建造费用最小，最小费用为 $500(3+\sqrt{3})$ 万元.

………………………… 12 分

21.（1）解：因为△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，$2S=a^2-(b-c)^2$，

所以 $bc\sin A=a^2-b^2-c^2+2bc$. ………………………… 1 分

由余弦定理，得 $a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$. ………………………… 2 分

所以 $bc\sin A=2bc-2bc\cos A$，因为 $bc\neq0$，

所以 $\sin A+2\cos A=2$. ………………………… 3 分

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin^2A+\cos^2A=1$，所以 $\sin A+2\sqrt{1-\sin^2A}=2$. ………………………… 4 分

化简得 $5\sin^2A-4\sin A=0$，解得 $\sin A=\frac{4}{5}$ 或 $\sin A=0$（不合题意，舍去）. ………………………… 5 分

因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3}{5}$，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{4}{3}$. ………………………… 6 分

（2）证明：由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{8}{\frac{4}{5}}=10$，

所以 $b=10\sin B$，$c=10\sin C=10\sin(A+B)$. ………………………… 7 分

所以 $b+c=10\sin B+10\sin(A+B)=16\sin B+8\cos B=8\sqrt{5}\sin(B+\varphi)$，其中 φ 为锐角，且 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

………………………… 8 分

因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\frac{\pi}{2}<A-\varphi<\frac{\pi}{2}$.

又 $\sin A>\sin\varphi$，所以 $A>\varphi$，所以 $0<A-\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\frac{\pi}{2}-A+\varphi<\frac{\pi}{2}$. ………………………… 9 分

又 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<\pi-A-B<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{2}-A<B<\pi-A,\\0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$

所以 $\frac{\pi}{2}-A<B<\frac{\pi}{2}$. ………………………… 10 分

所以 $\frac{\pi}{2}-A+\varphi<B+\varphi<\frac{\pi}{2}+\varphi$.

因为函数 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，

且 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-A+\varphi\right)=\cos(\varphi-A)=\cos\varphi\cos A+\sin\varphi\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $8\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}<8\sqrt{5}\sin(B+\varphi)\leqslant 8\sqrt{5}$，即 $16<b+c\leqslant 8\sqrt{5}$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=e^x-\cos x+\sin x=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，………………………………………… 1 分

①当 $-\pi\leqslant x<-\frac{3\pi}{4}$ 时，$-\frac{5\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}<-\pi$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$，又 $e^x>0$，所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递增；………………………………………… 2 分

②当 $-\frac{3\pi}{4}\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$ 时，$-\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}<-\frac{3\pi}{4}$，因为 $f''(x)=e^x+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，且 $e^x<1$，$-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<-1$，所以 $f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，又 $f'\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=e^{-\frac{3\pi}{4}}>0$，$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0$，所以存在 $x_0\in\left(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，且在 $\left(-\frac{3\pi}{4},x_0\right)$ 上，$f'(x)>0$，在 $\left(x_0,-\frac{\pi}{2}\right)$ 上，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},x_0\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,-\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减；………………………………………… 3 分

③当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<0$ 时，$-\frac{3\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{4}$，所以 $-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant -1$，又 $e^x<1$，所以 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减；………………………………………… 4 分

④当 $0\leqslant x<\frac{\pi}{4}$ 时，$-\frac{\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}<0$，所以 $-1\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0$，$e^x\geqslant 1$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增；………………………………………… 5 分

⑤当 $x\geqslant\frac{\pi}{4}$ 时，$x-\frac{\pi}{4}\geqslant 0$，$e^x\geqslant e^{\frac{\pi}{4}}>\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>-\sqrt{2}$，所以 $f'(x)>0$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},+\infty\right)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},+\infty\right)$ 上单调递增. ………………………………………… 6 分

综上所述，$f(x)$在$[-\pi,x_0)$上单调递增，在$(x_0,0)$上单调递减，在$[0,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)$在$[-\pi,+\infty)$上仅有2个极值点. ………………………………………………………… 7分

(2)当$x\geqslant-\pi$时，$f'(x)\geqslant ax+2-2\cos x(a\in\mathbf{R})$恒成立，即$e^x+\sin x+\cos x-ax-2\geqslant0(a\in\mathbf{R})$，

令$\varphi(x)=e^x+\cos x+\sin x-ax-2$，则$\varphi(x)\geqslant0$，

因为$\varphi(x)\geqslant0$且$\varphi(0)=0$，所以当$x=0$时，$\varphi(x)$取得最小值. ………………………………… 8分

$\varphi'(x)=e^x-\sin x+\cos x-a$，

则$x=0$为函数$\varphi(x)$的极小值点，故$\varphi'(0)=2-a=0$，解得$a=2$. ………………………………… 9分

下面证明：当$a=2$时，$x=0$为函数$\varphi(x)$的最小值点，$\varphi'(x)=e^x-\sin x+\cos x-2$，

令$h(x)=e^x-\sin x+\cos x-2$，$h'(x)=e^x-\cos x-\sin x=f(x)$，

由(1)可知，$f(-\pi)=e^{-\pi}+1>0$，所以当$x\geqslant-\pi$时，$f(x)$的最小值为$f(0)=0$，所以函数$h'(x)\geqslant0$在$[-\pi,+\infty)$上恒成立，所以$h(x)$(即$\varphi'(x)$)在$[-\pi,+\infty)$上单调递增，又$\varphi'(0)=0$，所以当$-\pi\leqslant x<0$时，$\varphi'(x)<0$，当$x>0$时，$\varphi'(x)>0$，

所以函数$\varphi(x)$在$[-\pi,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，………………………………… 11分

所以$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，符合题意.

综上所述，$a=2$. ……………………………………………………………………………… 12分