

2024 年高考数学仿真模拟卷(七) (新高考专用)

解析

(时间: 120 分钟 满分: 150 分)

一、选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 答案 D

解析 由 $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ 可得 $-1 \leq x \leq 5$, 所以 $A = [-1, 5]$, 由 $\log_2 x < 2$, 即 $\log_2 x < \log_2 4$, 可得 $0 < x < 4$, 所以 $B = (0, 4)$, 所以 $A \cap B = (0, 4)$.

2. 答案 B

解析 由 $\frac{z-1}{1-i} = 1+2i$ 可得 $z-1 = (1+2i)(1-i) = 3+i$, 所以 $|z-1| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$.

3. 答案 C

解析 若“直线 $l_1: ax+y+2=0$ 与 $l_2: x+ay-3-a=0$ 平行”, 则 $a^2-1=0$, 解得 $a=1$ 或 $a=-1$,

当 $a=1$ 时, 直线 $l_1: x+y+2=0$, $l_2: x+y-4=0$, 此时 $l_1 \parallel l_2$, 符合题意;

当 $a=-1$ 时, 直线 $l_1: -x+y+2=0$, 即 $l_1: x-y-2=0$, $l_2: x-y-2=0$,

此时 l_1 与 l_2 重合, 不符合题意;

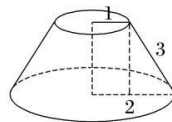
综上所述, “直线 $l_1: ax+y+2=0$ 与 $l_2: x+ay-3-a=0$ 平行” 等价于 “ $a=1$ ”.

所以 “ $a=1$ ” 是 “直线 $l_1: ax+y+2=0$ 与 $l_2: x+ay-3-a=0$ 平行” 的充要条件.

4. 答案 B

解析 由图可得, 圆台的高为 $\sqrt{3^2 - (2-1)^2} = 2\sqrt{2}$,

故圆台的体积为 $V = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times (\pi \times 1^2 + \pi \times 2^2 + \sqrt{\pi \times 1^2 \times \pi \times 2^2}) = \frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$.



5. 答案 C

解析 ①游泳场地安排 2 人, 则不同的安排方法有 $C_3^2 A_2^2 = 6$ (种),

②游泳场地只安排 1 人, 则不同的安排方法有 $C_3^1 C_3^2 A_2^2 = 18$ (种),

所以不同的安排方法有 $6+18=24$ (种).

6. 答案 A

解析 设过点 $A(-a, 0)$ 且方向向量为 $\mathbf{n} = (1, -1)$ 的光线, 经直线 $y = -b$ 的点为 B , 右焦点为 C .

因为方向向量 $\mathbf{n} = (1, -1)$ 的直线斜率为 -1 , 所以 $\angle CAB = \frac{\pi}{4}$, $k_{AB} = -1$,

又由反射光的性质可得 $k_{BC} = 1$, 故 $AB \perp BC$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 且 B 到 AC 的距离为 b ,

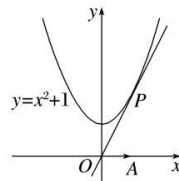
又 $|AC| = c + a$, 故 $a + c = 2b$, $a^2 + c^2 + 2ac = 4b^2 = 4(a^2 - c^2)$, 则 $(3a - 5c)(a + c) = 0$, 故 $3a = 5c$,

离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

7. 答案 A

解析 因为 $|\vec{OA}| = 1$, 且方向固定, 所以当 $\angle AOP$ 最小时, 投影向量长度最大,

此时点 P 在 y 轴右侧, 且 OP 与抛物线相切,



令直线 $OP: y=kx(k>0)$, 则 $kx=x^2+1$, 即 $x^2-kx+1=0$ 有唯一解, 得 $k=2$ (负舍),

即 $\tan \angle AOP = \frac{\sin \angle AOP}{\cos \angle AOP} = 2$, 且 $\angle AOP$ 为锐角,

结合 $\sin^2 \angle AOP + \cos^2 \angle AOP = 1$, 解得 $\cos \angle AOP = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

\vec{OA} 在 \vec{OP} 方向上的投影向量的长度为 $|\vec{OA}| \cos \angle AOP = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

8. 答案 C

解析 因为 $f_n(x) = |f_{n-1}(x)| - 1 (n \geq 2)$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $f_n(x) \geq -1$,

$f_{2023}(x) = 0 \Leftrightarrow f_{2022}(x) = \pm 1$, 得 $|f_{2021}(x)| = 0$ 或 $|f_{2021}(x)| = 2$, 得 $f_{2021}(x) = 0$ 或 $f_{2021}(x) = 2$,

由 $f_{2021}(x) = 0$ 得 $f_{2019}(x) = 0$ 或 $f_{2019}(x) = 2$,

由 $f_{2021}(x) = 2$ 得 $|f_{2020}(x)| = 3$, 进而可得 $f_{2019}(x) = 4$,

故由 $f_{2023}(x) = 0$ 可得, $f_{2019}(x) = 0$ 或 $f_{2019}(x) = 2$ 或 $f_{2019}(x) = 4$.

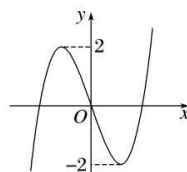
...

依此类推, 可得 $f_1(x) = 2k$, 其中 $k = 0, 1, 2, \dots, 2023$.

又 $f'_1(x) = 3x^2 - 3$,

令 $f'_1(x) = 3x^2 - 3 > 0$ 可得 $f_1(x)$ 在 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ 上单调递增,

令 $f'_1(x) = 3x^2 - 3 < 0$ 可得 $f_1(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 画出函数的图象, 如图所示.



由图可知, $f_1(x)$ 的图象与 $y = 2k, k = 0, 1, 2, \dots, 2023$ 共有 $3 + 2 + 2022 = 2027$ (个) 交点.

二、选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求的. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 答案 BC

解析 直线 l 的方程可化为 $m(x-2) = y-2$, 过定点 $(2, 2)$, 故 A 错误;

设 $P(2, 2)$, 则圆心到直线的距离 $d \leq |CP| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 且半径 $r = 3$,

所以最小弦长为 $2\sqrt{3^2 - 5} = 4$, 故 B 正确;

当 $m = 1$ 时, 直线方程为 $x - y = 0$, 则点 $C(3, 4)$ 关于直线 l 对称的点为 $(4, 3)$, 故 C 正确;

当垂足为 $M(2, 2)$ 时, $|MC| = \sqrt{5} < \sqrt{13}$, 所以 $\sqrt{13}$ 不是最小值, 故 D 错误.

10. 答案 BC

解析 由题意可得 $|\vec{EM}| = |\vec{NF}| = 1$.

对于 A, 可得 $\vec{PM} = \vec{PE} + \vec{EM} = \vec{PE} + \frac{1}{8}\vec{EF} = \vec{PE} + \frac{1}{8}(\vec{PF} - \vec{PE}) = \frac{7}{8}\vec{PE} + \frac{1}{8}\vec{PF}$, 故 A 错误;

对于 B, $\because \vec{EM} = \vec{NF}, \therefore \vec{PM} - \vec{PE} = \vec{PF} - \vec{PN}$, 整理得 $\vec{PE} + \vec{PF} = \vec{PM} + \vec{PN}$, 故 B 正确;

对于 C, 由题意可得 $0^\circ < \angle MPN < \angle EPF = 90^\circ, EP \perp PF$,

则 $\vec{PM} \cdot \vec{PN} = |\vec{PM}| |\vec{PN}| \cos \angle MPN > 0, \vec{PE} \cdot \vec{PF} = 0$, 即 $\vec{PM} \cdot \vec{PN} > \vec{PE} \cdot \vec{PF}$, 故 C 正确;

对于 D, $\because \vec{PF} - \vec{PE} = \vec{EF}, \vec{PN} - \vec{PM} = \vec{MN}$, 但向量不能比较大小, 故 D 错误.

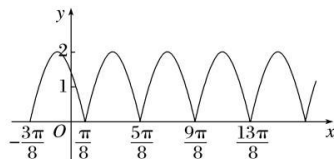
11. 答案 BC

解析 $f\left(-x+\frac{\pi}{4}\right) = \left| 2\sin\left[2\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right] \right| = \left| 2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \right| = f(x)$,

故 A 不正确; B 正确;

$f(x) = \left| 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \right|$ 的图象如图所示,

若 $f(x_1)f(x_2) = 4$, $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) = f(x_2) = 2$,



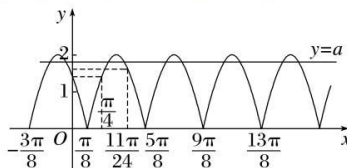
由图可知, 因为 $f(x) = \left| 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \right|$ 的最小正周期为 $T = \frac{\pi}{2}$, 所以 $|x_1 - x_2|_{\min} = T = \frac{\pi}{2}$, 故 C 正确;

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left| 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| 2\sin \frac{\pi}{4} \right| = \sqrt{2}$, $f\left(\frac{11\pi}{24}\right) = \left| 2\sin\left(2 \times \frac{11\pi}{24} - \frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| 2\sin \frac{2\pi}{3} \right| = \sqrt{3}$,

若 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{24}\right]$, 函数 $y = f(x) - a$ 有两个零点,

即 $y = f(x)$ 与 $y = a$ 的图象有两个交点,

由图可知, $a \in [\sqrt{3}, 2)$, 故 D 不正确.



12. 答案 BCD

解析 若 $A_1M \perp AB_1$, 则 A_1M 在平面 ABB_1A_1 上的投影在 A_1B 上, 所以 M 的轨迹为 A_1C ,

AM 的最小值为 A 到 A_1C 的距离, $AM \times A_1C = AA_1 \times AC$, $AM \times \sqrt{3} = 1 \times \sqrt{2}$, 故 AM 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 故 A 错误;

因为 E, F 分别为 AB_1 和 BC 的中点, 所以 $EF \parallel A_1C$, M 的轨迹为 A_1C , M 到平面 AEF 的距离为定值, 所以三棱锥 $A-EFM$ 的体积为定值, 故 B 正确;

当且仅当 M 为 A_1C 的中点时, $EM \parallel$ 平面 $ABCD$, 若存在两个点 M , $EM_1 \parallel$ 平面 $ABCD$, $EM_2 \parallel$ 平面 $ABCD$,

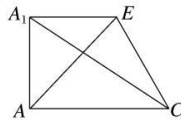
$EM_1 \cap EM_2 = E$, $EM_1 \subset$ 平面 EA_1C , $EM_2 \subset$ 平面 EA_1C , 平面 $EA_1C \parallel$ 平面 $ABCD$, 得出矛盾, 故 C 正确;

将平面 EA_1C 翻折到与平面 AA_1C 重合,

$$\cos \angle EA_1C = \frac{A_1E^2 + A_1C^2 - EC^2}{2A_1E \cdot A_1C} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \sin \angle AA_1C = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

所以 $\sin \angle AA_1C = \cos \angle EA_1C$, 所以 $\angle AA_1E = \frac{\pi}{2}$, $AE = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $AM + EM$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 D 正确.



三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 答案 -120

解析 由二项式展开式的通项, 可得 $T_{k+1} = C_{10}^k \left(x + \frac{1}{x}\right)^{10-k} (-y)^k$,

故只有 $T_8 = C_{10}^7 \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 (-y)^7$ 包含 x^3y^7 , 又 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$ 展开式的通项为 $S_{m+1} = C_3^m x^{3-m} \left(\frac{1}{x}\right)^m = C_3^m x^{3-2m}$,

故当 $m=0$ 时, x^3y^7 的系数为 $(-1)^7 C_{10}^7 C_3^0 = -120$.

14. 答案 0.053

解析 设任取一件产品来自甲厂为事件 A_1 、来自乙厂为事件 A_2 、来自丙厂为事件 A_3 ,

则彼此互斥, 且 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$,

$$P(A_1) = \frac{3000}{3000+3000+4000} = \frac{3}{10}, P(A_2) = \frac{3000}{3000+3000+4000} = \frac{3}{10}, P(A_3) = \frac{4000}{3000+3000+4000} = \frac{2}{5},$$

设任取一件产品，取到的是次品为事件 B ，

$$\text{则 } P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \frac{3}{10} \times 6\% + \frac{3}{10} \times 5\% + \frac{2}{5} \times 5\% = \frac{53}{1000} = 0.053.$$

15. 答案 $2x+y-4=0$

解析 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 分别为函数 $f(x)$ 的图象上关于直线 $x=1$ 对称的两点，不妨设 $x_1 \leq 1$ ，则 $x_2 > 1$ 。

$$\text{所以 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ y_1 = y_2, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} x_1 = 2 - x_2, \\ y_1 = y_2, \end{cases} \text{ 所以 } y_2 = e^{2-x_2} + 2 - x_2 - 1 = e^{2-x_2} - x_2 + 1.$$

所以当 $x > 1$ 时， $f(x) = e^{2-x} - x + 1$ 。所以 $f(2) = e^{2-2} - 2 + 1 = 0$ 。

而 $f'(x) = -e^{2-x} - 1$ ，所以 $f'(2) = -e^{2-2} - 1 = -2$ 。

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = -2(x-2)$ ，即 $2x+y-4=0$ 。

16. 答案 16

解析 \because 焦点 F 到准线的距离为 2， $\therefore p=2$ ，则抛物线方程为 $y^2=4x$ ， $\therefore F(1,0)$ ，

又 $\vec{OA} = 4\vec{OF}$ ， $\therefore A(4,0)$ ；

设 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ， $M(x_3, y_3)$ ， $N(x_4, y_4)$ ，设直线 PQ ： $x=my+4$ ，

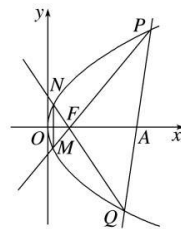
$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 4, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 4my - 16 = 0, \therefore y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -16;$$

设直线 PM ： $x=ny+1$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} x = ny + 1, \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 4ny - 4 = 0, \therefore y_1 + y_3 = 4n, y_1 y_3 = -4, \text{ 则 } y_3 = -\frac{4}{y_1};$$

同理可得 $y_4 = -\frac{4}{y_2}$ ；

$$\therefore \frac{S_{\triangle PQF}}{S_{\triangle MNF}} = \frac{\frac{1}{2}|PF| \cdot |QF| \sin \angle PFQ}{\frac{1}{2}|MF| \cdot |NF| \sin \angle MFN} = \frac{|PF| \cdot |QF|}{|MF| \cdot |NF|} = \frac{|y_1 y_2|}{|y_3 y_4|} = \left| \frac{16}{y_1 y_2} \right| = \frac{(y_1 y_2)^2}{16} = 16.$$



四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

$$17. \text{ 解 (1) 因为 } \sin \frac{A+C}{2} = \sin \frac{\pi-B}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \right) = \cos \frac{B}{2},$$

所以由 $\cos B + \sin \frac{A+C}{2} = 0$ 得 $\cos B + \cos \frac{B}{2} = 0$ ，所以 $2\cos \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2} - 1 = 0$ ，

解得 $\cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ 或 $\cos \frac{B}{2} = -1$ ，

因为 $0 < B < \pi$ ，所以 $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ ，则 $\cos \frac{B}{2} > 0$ ，故 $\cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ ，

则 $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{3}$ ，故 $B = \frac{2\pi}{3}$ 。

(2) 因为 $a : c = 3 : 5$ ，令 $c = 5m (m > 0)$ ，则 $a = 3m$ ，

由三角形面积公式可得 $\frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}b \times \frac{15\sqrt{3}}{14}$, 则 $15b = 7ac = 7 \times 15m^2$, 故 $b = 7m^2$,

由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$, 则 $49m^4 = 49m^2$, 解得 $m = 1$,

从而 $a = 3, c = 5, b = 7$, 故 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 15$.

18. 解 (1) 因为 $a_{n+1} = \frac{4a_n}{3a_n + 1}$, $a_1 = \frac{4}{5} \neq 0$, 所以 $a_n \neq 0$, 取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4a_n}$,

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{4a_n} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)$, 即 $\frac{a_{n+1}}{1 - a_{n+1}} = \frac{4a_n}{1 - a_n}$, 即 $b_{n+1} = 4b_n$,

因为 $b_1 = 4 \neq 0$, 所以 $\{b_n\}$ 是 $b_1 = 4, q = 4$ 的等比数列,

所以 $b_n = 4^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 在 b_1, b_2 之间有 2 个 3, b_2, b_3 之间有 2^2 个 3, b_3, b_4 之间有 2^3 个 3, b_4, b_5 之间有 2^4 个 3,

合计 $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$ 个 3,

所以 $S_{36} = \sum_{i=1}^5 b_i + 31 \times 3 = \frac{4 \times (1 - 4^5)}{1 - 4} + 93 = 1364 + 93 = 1457$.

19. (1) 证明 作 $SO \perp$ 底面 ABC , 垂足为 O , 则 $\angle SBO$ 为 SB 与平面 ABC 所成角,

即 $\angle SBO = \frac{\pi}{3}$, 在 $\text{Rt}\triangle SBO$ 中, 由 $SB = 4$ 可得 $BO = 2, SO = 2\sqrt{3}$,

因为 $SO \perp$ 底面 $ABC, CO \subset$ 底面 ABC , 故 $SO \perp CO$,

在 $\text{Rt}\triangle SCO$ 中, $SC = 2\sqrt{6}$, 则 $CO = \sqrt{SC^2 - SO^2} = \sqrt{24 - 12} = 2\sqrt{3}$,

在 $\triangle BCO$ 中, 由 $BC = 4, CO = 2\sqrt{3}, BO = 2$ 可得 $BC^2 = CO^2 + BO^2$, 故 $CO \perp BO$, 且 $\angle BCO = \frac{\pi}{6}$,

在 $\triangle ACO$ 中, $AC = 4, \angle ACO = \frac{\pi}{6}$, 则 $\triangle ACO \cong \triangle BCO$,

故 $AO = BO = 2$, 而 $AB = 4$, 故点 O 必在 AB 上, 且为 AB 的中点,

$SO \perp$ 底面 $ABC, AB \subset$ 底面 ABC , 故 $SO \perp AB$,

又 $AB \perp CO, SO \cap CO = O, SO, CO \subset$ 平面 SCO , 故 $AB \perp$ 平面 $SCO, SC \subset$ 平面 SCO ,

故 $SC \perp AB$.

(2) 解 由(1)可知 $CO \perp AB, SO \perp CO$, 且 $SO \cap AB = O, SO, AB \subset$ 平面 SAB ,

故 $CO \perp$ 平面 SAB ,

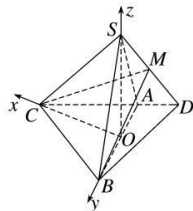
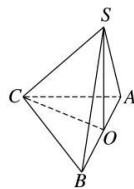
以点 O 为坐标原点, 以 OC, OB, OS 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

由于 $CD = \frac{3}{2}CA$, 故 $AD = 2$,

则 $B(0, 2, 0), C(2\sqrt{3}, 0, 0), S(0, 0, 2\sqrt{3}), D(-\sqrt{3}, -3, 0)$,

所以 $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right), \vec{BM} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{7}{2}, \sqrt{3}\right), \vec{BC} = (2\sqrt{3}, -2, 0)$,

设平面 BCM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,



$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BM} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{7}{2}y + \sqrt{3}z = 0, \\ 2\sqrt{3}x - 2y = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y = \sqrt{3}, \text{ 则 } \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 4),$$

由题意可取平面 SAB 的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 0, 0)$,

$$\text{设平面 } BCM \text{ 与平面 } SAB \text{ 的夹角为 } \theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 则 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{5}}{10},$$

故平面 BCM 与平面 SAB 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

20. (1)解 方法一 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

在一次扑球中, 扑到点球的概率 $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3 = \frac{1}{9}$,

$$\text{所以 } P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{512}{729}, \quad P(X=1) = C_3^1 \cdot \frac{1}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{243},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times \frac{8}{9} = \frac{8}{243}, \quad P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{1}{729},$$

所以 X 的分布列如下

X	0	1	2	3
P	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

$$E(X) = \frac{64}{243} \times 1 + \frac{8}{243} \times 2 + \frac{1}{729} \times 3 = \frac{81}{243} = \frac{1}{3}.$$

方法二 依题意可得, 门将每次可以扑到点球的概率为 $p = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$,

门将在前三次扑到点球的个数 X 可能的取值为 0,1,2,3, 易知 $X \sim B\left(3, \frac{1}{9}\right)$,

$$\text{所以 } P(X=k) = C_3^k \times \left(\frac{1}{9}\right)^k \times \left(\frac{8}{9}\right)^{3-k}, \quad k=0,1,2,3,$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

$$\text{所以 } X \text{ 的期望 } E(X) = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

(2)①证明 第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n ,

则当 $n \geq 2$ 时, 第 $n-1$ 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_{n-1} ,

第 $n-1$ 次传球之前球不在甲脚下的概率为 $1-p_{n-1}$,

$$\text{则 } p_n = p_{n-1} \times 0 + (1-p_{n-1}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } p_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left[p_{n-1} - \frac{1}{3} \right], \text{ 又 } p_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

所以 $\left\{ p_n - \frac{1}{3} \right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$$\text{②解 由①可知 } p_n = \frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{3} \right],$$

$$\text{所以 } p_{10} = \frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^9 + \frac{1}{3} \right],$$

$$\text{所以 } q_{10} = \frac{1}{2} (1 - p_{10}) = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^9 \right] > \frac{1}{3}, \text{ 故 } p_{10} < q_{10}.$$

21. 解 (1) 由 $F_1: x^2 + y^2 + 4x = 0$, 得 $(x+2)^2 + y^2 = 4$, 可知 $F_1(-2, 0)$, 其半径为 2,

由 $F_2: x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$, 得 $(x-2)^2 + y^2 = 16$, 可知 $F_2(2, 0)$, 其半径为 4.

设动圆半径为 r , 动圆圆心到 F_1 的距离为 n , 到 F_2 的距离为 m , 则有

$$\begin{cases} n+2=r, \\ m+4=r \end{cases} \Rightarrow n-m=2 \text{ 或 } \begin{cases} n+r=2, \\ m+r=4 \end{cases} \Rightarrow m-n=2,$$

即 $|n-m|=2=2a$, 得 $a=1$, 又 $|F_1F_2|=4=2c > 2a$,

所以动圆圆心 M 的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的双曲线, 由 $c^2 = a^2 + b^2$, 可得 $b^2 = 3$,

所以动圆圆心 M 的轨迹方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 当直线 l_1 的斜率存在时, 由题意知, $k \neq 0$, 设 $l_1: y = kx - 2k$,

$$\text{与双曲线联立得 } \begin{cases} y = kx - 2k, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (3-k^2)x^2 + 4k^2x - 4k^2 - 3 = 0,$$

由直线 l_1 与双曲线有两个不同的交点,

$$\text{所以 } \begin{cases} 3-k^2 \neq 0, \\ \Delta = 16k^4 + 4(3-k^2)(4k^2+3) = 36k^2 + 36 > 0, \end{cases} \text{ 得 } k^2 \neq 3 \text{ 且 } k^2 \neq 0, \text{ 且 } |MN| = \sqrt{1+k^2} \times \frac{6\sqrt{1+k^2}}{|3-k^2|} = \frac{6(k^2+1)}{|k^2-3|},$$

设 $l_2: y = -\frac{1}{k}x + \frac{2}{k}$, 即 $x + ky - 2 = 0$,

$$\text{设点 } F_1 \text{ 到直线 } l_2 \text{ 的距离为 } d, \text{ 则 } d = \frac{|-2-2|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{4}{\sqrt{k^2+1}},$$

因为 l_2 交圆 F_1 于 P, Q 两点, 故 $d < 2$, 得 $k^2 > 3$. 且 $|PQ| = 2\sqrt{2^2 - d^2} = 4\sqrt{\frac{k^2-3}{k^2+1}}$,

由题意可知 $MN \perp PQ$,

$$\text{所以 } S_{\Delta PQM} + S_{\Delta PQN} = \frac{1}{2} \times |PQ| \times |MN| = 12\sqrt{\frac{k^2+1}{k^2-3}} = 12\sqrt{1 + \frac{4}{k^2-3}},$$

因为 $k^2 > 3$, 可得 $S_{\Delta PQM} + S_{\Delta PQN} > 12$.

② 当直线 l_1 的斜率不存在时, $|PQ| = 4, |MN| = 6$,

所以 $S_{\Delta PQM} + S_{\Delta PQN} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$,

综上, $S_{\Delta PQM} + S_{\Delta PQN} \geq 12$.

22. (1)解 由题意知 $f(x) = e^x - a \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有极小值, 则 $f'(x) = e^x - a \cos x = 0$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有解,

故 $a = \frac{e^x}{\cos x}$, 设 $g(x) = \frac{e^x}{\cos x} \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, 显然 $g(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

又 $g(0) = 1$, 当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $a > 1$.

当 $a > 1$ 时, $f'(x) = e^x - a \cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

又 $f'(0) = 1 - a < 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$,

由函数零点存在定理可知 $\exists \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $f'(\alpha) = 0$,

此时当 $x \in (0, \alpha)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 上单调递减, 在 $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有极小值点.

因此实数 a 的取值范围为 $a > 1$.

(2)证明 由题意知 $f'(x) = e^x - a \cos x + b$,

故 $f'(x_0) = e^{x_0} - a \cos x_0 + b = 0$.

$f(x_0) = e^{x_0} - a \sin x_0 + b x_0 = e^{x_0} - a \sin x_0 + b x_0 + f'(x_0)$

$= 2e^{x_0} - a(\sin x_0 + \cos x_0) + b x_0 + b = 2e^{x_0} - \sqrt{2}a \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) + b x_0 + b \geq 2e^{x_0} + b x_0 + b - \sqrt{2}a$.

设 $h(x) = 2e^x + bx + b - \sqrt{2}a (x \in \mathbf{R})$,

则 $h'(x) = 2e^x + b$, 当 $x \in \left(-\infty, \ln\left(-\frac{b}{2}\right)\right)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in \left(\ln\left(-\frac{b}{2}\right), +\infty\right)$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln\left(-\frac{b}{2}\right)\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\ln\left(-\frac{b}{2}\right), +\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $h(x) \geq h\left(\ln\left(-\frac{b}{2}\right)\right) = b \ln\left(-\frac{b}{2}\right) - \sqrt{2}a$.

因此 $f(x_0) \geq b \ln\left(-\frac{b}{2}\right) - \sqrt{2}a$ 成立.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

