2024届高三第一学期期中质量监测

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上指定位置上，在其他位置作答一律无效。

3. 本卷满分为150分，考试时间为120分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}$，$B=\{2,3\}$，则 $A\cap B=$

A．$\varnothing$　　B．$\{2\}$　　C．$\{3\}$　　D．$\{2,3\}$

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$，若 $(2+\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})$ 为纯虚数，则 $a=$

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．-2　　D．2

3. “$a=1$”是“函数 $f(x)=\dfrac{2^x-a}{2^x+a}$ 为奇函数”的

A．充分且不必要条件　　B．必要且不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4. 学校以“布一室馨香，育满园桃李”为主题开展了系列评比活动，动员师生一起为营造舒心愉悦的学习生活环境奉献智慧．张老师特地培育了一盆绿萝放置在教室内，绿萝底部的盆近似看成一个圆台，圆台的上、下底面半径之比为$3:2$，母线长为10 cm，其母线与底面所成的角为$60°$，则这个圆台的体积为

A．$\dfrac{2375\sqrt{3}}{3}\pi$ cm³　　B．$\dfrac{4750\sqrt{3}}{3}\pi$ cm³　　C．$\dfrac{7125\sqrt{3}}{3}\pi$ cm³　　D．$\dfrac{9500\sqrt{3}}{3}\pi$ cm³

5. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，现有如下四个命题：

甲：该函数图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$；

乙：该函数图象可以由 $y=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到；

丙：该函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增；

丁：该函数满足 $f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$.

如果只有一个假命题，那么该命题是

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

6. 已知奇函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x+b$，则 $f\left(\frac{2023}{2}\right)=$

A．$-1-\sqrt{2}$　　B．$1-\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}+1$　　D．$\sqrt{2}-1$

7. 若 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=$

A．$-\frac{7}{25}$　　B．$-\frac{12}{25}$　　C．$\frac{7}{25}$　　D．$\frac{12}{25}$

8. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbf{R})$，若不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x\,|\,x<m+1,且x\neq m\}$，则函数 $f(x)$ 的极小值是

A．$-\frac{1}{4}$　　B．0　　C．$-\frac{4}{27}$　　D．$-\frac{4}{9}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为 CC_1，A_1D_1 的中点，则

A．$BM\parallel AD_1$　　B．$AM\perp BD$

C．$B_1M\perp$ 平面 ABN　　D．$MN\parallel$ 平面 A_1BD

10. 设 $a>b>0,c\in\mathbf{R}$，则

A．$a|c|>b|c|$　　B．$\frac{b}{a}\leqslant\frac{b+c^2}{a+c^2}$

C．$a^2-b^2<\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$　　D．$a+b<\sqrt{2(a^2+b^2)}$

11. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_4=4$，$a_na_{n+1}=2^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则

A．$a_1=1$　　　　B．数列$\{a_n\}$为递增数列

C．$a_1+a_2+\cdots+a_{2023}=2^{1013}-3$　　　　D．$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<3$

12. 已知函数$f(x)=a^{2x}-x(a>0,a\neq1)$，则下列结论中正确的是

A．函数$f(x)$恒有1个极值点

B．当$a=\mathrm{e}$时，曲线$y=f(x)$恒在曲线$y=\ln x+2$上方

C．若函数$f(x)$有2个零点，则$1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$

D．若过点$P(0,t)$存在2条直线与曲线$y=f(x)$相切，则$0<t<1$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量$\boldsymbol{a}=(\lambda,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

14. 写出一个同时满足下列两个性质的函数：$f(x)=$________.

①$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$；②$\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)<0$.

15. 咖啡适度饮用可以提神醒脑、消除疲劳，让人精神振奋．冲咖啡对水温也有一定的要求，把物体放在空气中冷却，如果物体原来的温度是θ_1℃，空气的温度是θ_0℃，经过t分钟后物体的温度为θ℃满足$\theta=\theta_0+\left(\theta_1-\theta_0\right)\mathrm{e}^{-0.08t}$．研究表明，咖啡的最佳饮用口感会出现在65℃．现有一杯85℃的热水用来冲咖啡，经测量室温为25℃，那么为了获得最佳饮用口感，从冲咖啡开始大约需要等待________分钟．（结果保留整数）

（参考数据：$\ln2\approx0.7$，$\ln3\approx1.1$，$\ln11\approx2.4$）

16. 在平面四边形$ABCD$中，$AB=AD=\sqrt{2}$，$BC=CD=1$，$BC\perp CD$，将四边形沿BD折起，使$A'C=\sqrt{3}$，则四面体$A'-BCD$的外接球O的表面积为________；若点E在线段BD上，且$BD=3BE$，过点E作球O的截面，则所得的截面中面积最小的圆的半径为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

已知函数 $f(x)=\left(1-2\sin^2 x\right)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$．

（1）求 $f(x)$ 的最大值及相应 x 的取值集合；

（2）设函数 $g(x)=f(\omega x)\,(\omega>0)$，若 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有且仅有 1 个极值点，求 ω 的取值范围．

18.（12 分）

在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $\tan A+\tan B=-\frac{\sqrt{3}c}{a\cos B}$．

（1）求角 A；

（2）已知 $a=7$，D 是边 BC 的中点，且 $AD\perp AB$，求 AD 的长．

19. （12 分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4n}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

20.（12 分）

已知函数$f(x)=ax-a-\ln x$.

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）证明：当$a=1$时，$f(x)\geqslant 0$；

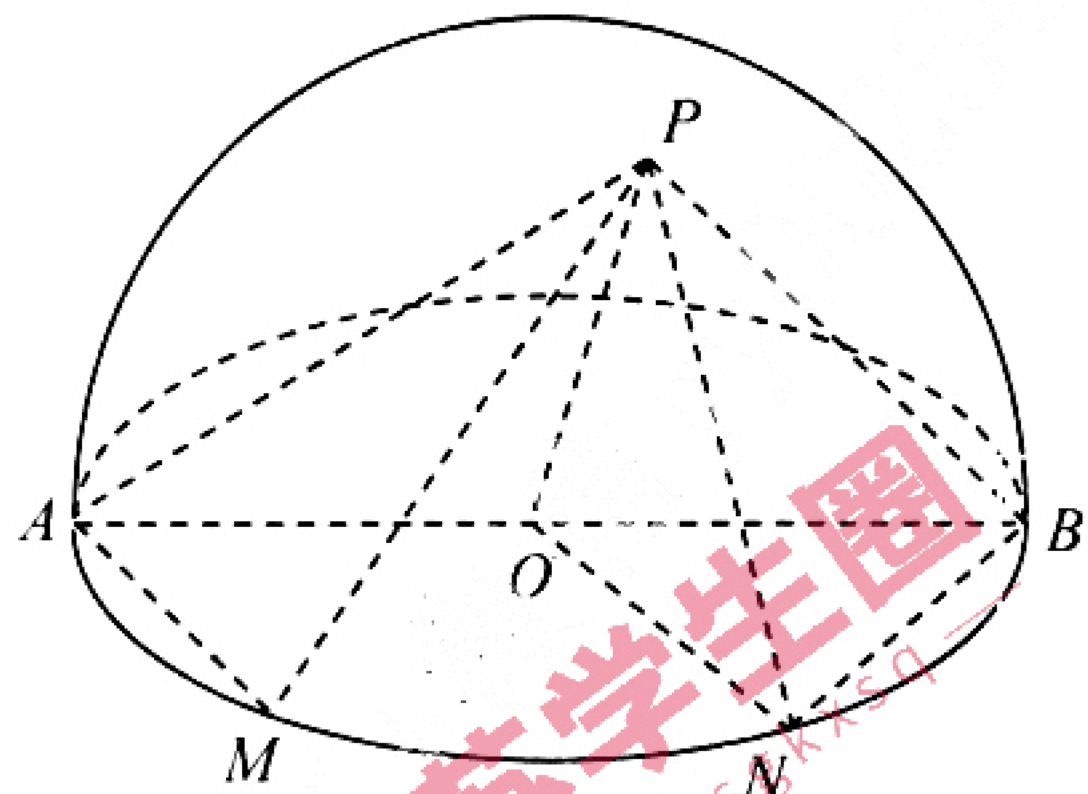
（3）设m为整数，若对于$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{2}{3^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{3^3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{2^{n-1}}{3^n}\right)<m$成立，求$m$的最小值.

21.（12 分）

如图，AB 是半球 O 的直径，$AB=4$，M，N 是底面半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的两个三等分点，P 是半球面上一点，且 $\angle PON=60^\circ$．

（1）证明：$PB\perp$ 平面 PAM；

（2）若点 P 在底面圆内的射影恰在 ON 上，求直线 PM 与平面 PAB 所成角的正弦值．



22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 a，b 为两个不相等的实数，且 $ae^b-be^a=e^a-e^b$，证明：$e^a+e^b>2$．