数学（理科）试题

（命题人：　　　　审题人：　　　　）

时间：120 分钟　　总分：150 分

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、班级、考号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，将答案书写在答题卡相应位置上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|2^x>4\},B=\{x\in Z|\ \log_2 x<3\}$，则 $(C_R A)\cap B=$（　）

A．$(0,2)$　　B．$(0,2]$　　C．$\{1,2\}$　　D．$(1,2]$

2．若 i 是虚数单位，则复数 $\frac{2+3i}{1+i}$ 的虚部为（　　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\frac{5}{2}i$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}i$

3．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_7+a_9=16$，$a_4=1$，则 a_{12} 等于（　）

A．15　　B．30　　C．31　　D．64

4．在 $\triangle ABC$ 中，“$A>\frac{\pi}{6}$”是“$\sin A>\frac{1}{2}$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,<\vec{a},\vec{b}>=\frac{2\pi}{3}$，则 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$（　）

A．－2　　B．－1　　C．0　　D．2

6．已知角 α 的顶点是坐标原点，始边是 x 轴的正半轴，终边是射线 $y=2x(x\geq 0)$，则 $\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$（　）

A．$\frac{1}{7}$　　B．$-\frac{1}{7}$　　C．-7　　D．$-\frac{1}{3}$

7．中国古典十大名曲是指《高山流水》、《梅花三弄》、《夕阳箫鼓》、《汉宫秋月》、《阳春白雪》、《渔樵问答》、《胡笳十八拍》、《广陵散》、《平沙落雁》、《十面埋伏》。如图，以时间为横轴、音高为纵轴建立平面直角坐标系，那么写在五线谱中的音符就变成了坐标系中的点，如果这些点在函数 $y=4\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象上，且图象过点 $\left(\frac{\pi}{24},2\right)$，相邻最大值与最小值之间的水平距离为 $\frac{\pi}{2}$，则是函数的单调递增区间的是（　）

A．$\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}\right]$　　B．$\left[\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$

C．$\left[\frac{5\pi}{24},\frac{3\pi}{8}\right]$　　D．$\left[-\frac{7\pi}{24},\frac{5\pi}{24}\right]$

8．已知函数 $g(x)=2^x-2^{-x}$，$f(x)=xg(x)$，若 $a=f\left(\ln\frac{1}{3}\right)$，b= $f\left(0.3^{\frac{1}{5}}\right)$，c= $f\left(4^{1.1}\right)$，则 a、b、c 的大小关系为（　）

A．$b<a<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<c<a$　　D．$a<b<c$

9．已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1)=-4-f(-1-x)$，且与曲线 $y=\frac{1-2x}{x+1}$ 交于点 $A(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n)$，则 $\sum_{i=1}^{4}(x_i+y_i)$ 为（　）

A．-16　　B．-12　　C．-9　　D．-6

10.若对任意的 x_1、$x_2\in(m,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，$\frac{x_1\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}>1$，则 m 的取值范围是（　）

A．$\left[\frac{1}{e},e\right)$　　B．$\left[e^2,+\infty\right)$　　C．$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D．$[e,+\infty)$

11．已知 S_n 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=\lambda$，且 $a_n+a_{n+1}=(-1)^n n^2$，若 $\frac{2S_{2023}}{2023}-\frac{a_{2023}}{2023}=1012-\mu$，（其中 $\lambda,\mu>0$），则 $\frac{2023}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ 的最小值是（　）

A．4　　B．2　　C．2023　　D．$2\sqrt{2023}+4$

12.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2e^x,x<1\\ \dfrac{e^x}{x^2},x\geq 1\end{cases}$，方程 $[f(x)]^2-2af(x)=0(a\in R)$ 有两个不等实根，则下列选项正确的是（　）

A．点(0,0)是函数 $f(x)$ 的零点　　B．a 的取值范围是 $(\dfrac{2}{e^2},\dfrac{e^2}{8})\cup[\dfrac{e}{2},+\infty)$

C．$x=-3$ 是 $f(x)$ 的极大值点　　D．$\exists x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,3)$，使 $f(x_1)>f(x_2)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(2x-1)^2+1,x\geq 2\\ 2^{x-1},x<2\end{cases}$，则 $f(\log_2\dfrac{1}{4})=$ ___________.

14．设命题 $p:\forall x\in\left[\sqrt{2},2\right],x+\dfrac{2}{x}\geq a$，若 $\neg p$ 是假命题，则实数 a 的取值范围是__________.

15．已知函数 $f(x)=m\sqrt{\ln x-\dfrac{1}{4}}+2x+\dfrac{1}{2}n$ 在区间 $[3,5]$ 上有零点，则 $z=m^2+n^2$ 的最小值为___________.

16.已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的周期为 π，图象的一个对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$，将函数 $f(x)$ 图象上的所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍（纵坐标不变），再将所得图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象.若存在实数 a 与正整数 n，使得 $F(x)=f(x)+ag(x)$ 在 $(0,n\pi)$ 内恰有 2023 个零点，则 n 的值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17．已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+3x-9$.

（1）若 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围.

18．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3,a_{n+1}+1=(a_n+1)^2,2^{b_n}=a_n+1$.

（1）求证：$\{b_n\}$ 是等比数列；

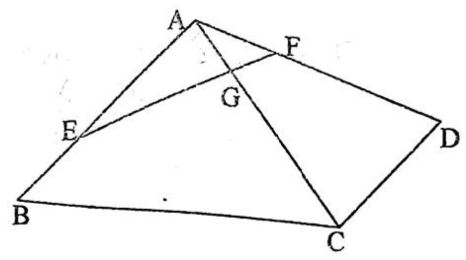
（2）若 $c_n=\dfrac{n}{b_n}+2n-1$，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.

19．已知在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a=4$，$\dfrac{a\cos C+c\cos A}{\cos C}+\sqrt{2}b=0$，

（1）求角 C 的值；

（2）若 $bc\cdot\sin(A+\dfrac{\pi}{2})=-b^2-ac\cdot\cos(B+\pi)$，求△ABC 的面积.

20．某公司拟扩建公司办公区域，扩建区域平面示意图大致为为四边形 $ABCD$（如图所示）。为了学习和生活的方便，现需要在线段 AB 和线段 AD 上分别选一处位置，分别记为点 E 和点 F，修建一条贯穿两块区域的直线道路 EF，线段 EF 与线段 AC 交于点 G，EG 段和 GF 段修建道路每千米的费用分别为 10 万元和 20 万元，已知线段 AG 长 2 千米，线段 AB 和线段 AD 长均为 6 千米，$AB\perp AC,\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，设 $\angle AEG=\theta$.



（1）求修建道路的总费用 y（单位：万元）与 θ 的关系式（不用求 θ 的范围）；

（2）求修建道路的总费用 y 的最小值.

21．已知函数 $f(x)=e^{ax}-ax(a\in R,a\neq 0)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $a(\ln b-\ln a+a)\geq be^{a-1}$，求 $\dfrac{1}{a+b}\cdot(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})$ 的最小值.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．在平面直角坐标系中，以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，两种坐标系取相同的单位长度，已知曲线 C：$\rho\sin^2\theta=2a\cos\theta(a>0)$，过点 $P(-2,-4)$ 的直线 l 的参数方程为：$\begin{cases}x=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）.

（1）求曲线 C 的普通直角坐标方程和直线 l 的极坐标方程；

（2）直线 l 与曲线 C 分别交于 M、N 两点.若 $|PM|$、$|MN|$、$|PN|$ 成等比数列，求 a 的值。

23．已知函数 $f(x)=|4x+a|-|4x+a^2|$.

（1）若 $a=2$，求不等式 $f(x)+\dfrac{1}{2}x<1$ 的解集；

（2）若 $\exists x\in R$，$\exists a\in[0,2]$，使得 $f\left(\dfrac{1}{2}x\right)>m$ 能成立，求实数 m 的取值范围.