2024届高三一轮复习联考(二)

数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】$z=(1+i^3)(i+i^2)=(1-i)(i-1)=2i$,所以$\bar{z}=-2i$,故选B.

2.A 【解析】$A=\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}\}=\{0,2,4,6,8,10,12,\cdots\}$,$B=\{x|x=3n,n\in\mathbf{N}\}=\{0,3,6,9,12,15,\cdots\}$,所以$A\cap B=\{0,6,12,18,\cdots\}=\{x|x=6n,n\in\mathbf{N}\}$,故选A.

3.C 【解析】根据特称命题:$\exists x_0\in M,p(x_0)$的否定形式是全称命题:$\forall x\in M,\neg p(x)$,可知"$\exists x_0>1,x_0-2\ln x_0\leqslant 1$"的否定为"$\forall x>1,x-2\ln x>1$",故选C.

4.C 【解析】根据题意,函数$f(x)=\frac{1}{e^x-1}+a$,其定义域为$\{x|x\neq 0\}$.由$f(-x)=-f(x)$,即$\left(\frac{1}{e^{-x}-1}+a\right)+\left(\frac{1}{e^x-1}+a\right)=-1+2a=0$,解得$a=\frac{1}{2}$,故选C.

5.A 【解析】$f'(x)=ae^x-2x$,根据$f(x)=ae^x-x^2+b$是增函数,得$f'(x)\geqslant 0$,即$ae^x-2x\geqslant 0$,$a\geqslant\frac{2x}{e^x}$,令$g(x)=\frac{2x}{e^x}$,则$g'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x)^2}=\frac{2(1-x)}{e^x}$,当$x<1$时,$g'(x)>0$,所以$g(x)$在$(-\infty,1)$是增函数,当$x>1$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(1,+\infty)$是减函数,$g(x)$有最大值$g(1)=\frac{2}{e}$,因此$a\geqslant\frac{2}{e}$,实数$a$的最小值是$\frac{2}{e}$,故选A.

6.B 【解析】若$ab\geqslant 2$,则$4^a+2^b\geqslant 2\sqrt{4^a\times 2^b}=2\sqrt{2^{2a}\times 2^b}=2\sqrt{2^{2a+b}}\geqslant 2\sqrt{2^{2\sqrt{2ab}}}\geqslant 2\sqrt{2^{2\sqrt{4}}}=8$,当$2a=b$,$ab=2$,即$a=1,b=2$时,等号成立,因此若不等式$ab\geqslant 2$成立,则不等式$4^a+2^b\geqslant 8$成立;反过来,若$4^a+2^b\geqslant 8$成立,取$a=2,b=\frac{1}{2}$,但是$ab=1$,不等式$ab\geqslant 2$不成立,因此不等式$4^a+2^b\geqslant 8$成立是不等式$ab\geqslant 2$成立的必要不充分条件,故选B.

7.C 【解析】$a=\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1}=\sin\theta\cdot\cos\theta$,$b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2\theta)=\sin^2\theta=\sin\theta\cdot\sin\theta$,$c=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\cdot\tan\theta$,根据$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$,得$\tan\theta>1$,$1>\sin\theta>\cos\theta>0$,即$\tan\theta>\sin\theta>\cos\theta$,$\sin\theta\cdot\tan\theta>\sin\theta\cdot\sin\theta>\sin\theta\cdot\cos\theta$,即$c>b>a$,故选C.

8.A 【解析】$\triangle ABC$的外接圆面积为4π,所以外接圆半径为2,不妨设三边a,b,c成等比数列,则$b^2=ac$.又$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$,当且仅当$a=c$时等号成立,所以$0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$,又$\frac{b}{\sin B}=4$,所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}b^2\sin B=8\sin^3 B\leqslant 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=3\sqrt{3}$,故选A.

9.ABC 【解析】若(a,b)为函数$y=\log_2 x$图象上的一点,则$b=\log_2 a$,$2^b=a$.由$2^b=a$,得(b,a)为函数$y=2^x$图象上的点,故A正确;由$2^b=a$,得$\left(\frac{1}{2}\right)^{-b}=2^b=a$,所以$(-b,a)$为函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$图象上的点,故C正确;由$b=\log_2 a$,得$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{a}=\log_2 a=b$,所以$\left(\frac{1}{a},b\right)$为函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x$图象上的点,故B正确;由$b=\log_2 a$,得$\log_4 a=\frac{1}{2}\log_2 a=\frac{1}{2}b$,所以$\left(a,\frac{b}{2}\right)$为函数$y=\log_4 x$图象上的点,故D不正确,故选ABC.

10.CD 【解析】$x^2+m=0$有两个不等的实数根$\sin\theta,\cos\theta$,则$\sin^2\theta+m=0$,$\cos^2\theta+m=0$,根据$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

得 $1+2m=0$，$m=-\dfrac{1}{2}$，故 D 正确；于是 $\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}$，$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$，因为 $\sin\theta\neq\cos\theta$，所以 $\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 于是 $\tan\theta=-1$，故 A 不正确；$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-1$，故 B 不正确；$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)=0$，故 C 正确.故选 CD.

11.AD 【解析】数列$\{a_n\}$是等差数列，公差 $d>0$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$，若 $b_n=-a_n$，则 $b_n=-dn-a_1+d$，$-d<0$，所以数列$\{b_n\}$是递减数列，故 A 正确；若 $b_n=a_n^2$，取 $a_n=n-3$，即 $a_1=-2$，$a_2=-1$，$a_3=0$，$a_4=1$，$a_5=2$，$b_1=4$，$b_2=1$，$b_3=0$，$b_4=1$，$b_5=4$，$b_1>b_2>b_3<b_4<b_5$，数列$\{b_n\}$不是递增数列，故 B 不正确；若 $b_n=a_n+a_{n+1}$，则 $b_n=a_1+(n-1)d+a_1+nd=2a_1+(2n-1)d$，$b_{n+1}-b_n=2a_1+(2n+1)d-2a_1-(2n-1)d=2d$，数列$\{b_n\}$是公差为 $2d$ 的等差数列，故 C 不正确；若 $b_n=a_n+n$，则 $b_n=a_1+(n-1)d+n=a_1-d+(d+1)\cdot n$，$b_{n+1}-b_n=a_1-d+(d+1)(n+1)-[a_1-d+(d+1)n]=d+1$，数列$\{b_n\}$是公差为 $d+1$ 的等差数列，故 D 正确.故选 AD.

12.ABD 【解析】由 $\begin{cases}2-x>0,\\ 2+x>0,\end{cases}$ 得 $-2<x<2$，所以函数 $f(x)$的定义域是$(-2,2)$.$f(-x)=|\ln(2+x)|+|\ln(2-x)|=|\ln(2-x)|+|\ln(2+x)|=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数，选项 A 正确；由于函数 $f(x)$是偶函数，图象关于 y 轴对称，所以考虑 $0<x<2$，于是 $\ln(2+x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$\ln(2-x)>0$，$f(x)=\ln(2-x)+\ln(2+x)=\ln(4-x^2)$，$f(x)$在$(0,1)$是减函数，当 $1<x<2$ 时，$\ln(2-x)<0$，$f(x)=-\ln(2-x)+\ln(2+x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}=\ln\left(-1+\dfrac{4}{2-x}\right)$，$f(x)$在$(1,2)$是增函数，因此 $f(x)$在 $x=1$ 时有最小值 $f(1)=\ln 3$，选项 B 正确；$f(2-x)=|\ln(2-(2-x))|+|\ln(2+(2-x))|=|\ln x|+|\ln(4-x)|\neq f(x)$，函数 $y=f(x)$的图象不关于直线 $x=1$ 对称，选项 C 不正确；由于函数$f(x)$是偶函数，根据其图象关于 y 轴对称，可得 $f(x)$在$(-2,-1)$是减函数，在$(-1,0)$是增函数，在$(0,1)$是减函数，在$(1,2)$是增函数，所以 $f(x)$在 $x=-1$ 处有极小值，在 $x=0$ 处有极大值，在 $x=1$ 处有极小值，因此$f(x)$有三个极值点，选项 D 正确.故选 ABD.

13.$6\sqrt{2}$ 【解析】由向量 $\boldsymbol{a}=(2,x)$，$\boldsymbol{b}=(-2x,-2)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，且 $\lambda>0$，则 $\begin{cases}2=-2x\lambda,\\ x=-2\lambda,\end{cases}$ $x=-\sqrt{2}$，于是 $\boldsymbol{a}=(2,-\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=(2\sqrt{2},-2)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\sqrt{2}$.

14.$\dfrac{\pi}{12}$ 【解析】根据 $\cos C=\dfrac{b}{2a}$，以及正弦定理，得 $\cos C=\dfrac{\sin B}{2\sin A}$，即 $2\sin A\cos C=\sin B$，又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，所以 $2\sin A\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，$\sin A\cos C-\cos A\sin C=0$，$\sin(A-C)=0$，$A=C$，由 $\cos B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $B=\dfrac{5}{6}\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{12}$.

15.2 【解析】设$\{a_n\}$的公比为 q，显然 $q\neq1$，$\dfrac{S_4}{S_2}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}}{\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=\dfrac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=3$，所以 $q^2=2$，$\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{a_2q^2}{a_2}=q^2=2$.

16. -3 【解析】根据$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$和$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，得$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$，设$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，设$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=m$，由$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}$，以及$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，得$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{9}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=-\frac{1}{9}m^2$，$|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{3}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{1}{3}\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}m$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\frac{1}{3}\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}m$，$\cos\angle BAD=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\frac{-\frac{1}{9}m^2}{\frac{\sqrt{2}}{3}m\times\frac{\sqrt{5}}{3}m}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\angle BAD=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\tan\angle BAD=-3$.

17. **证明**：(1)由a_n是a_{n+1}与-1的等差中项，得$2a_n=a_{n+1}-1$，…………………… 2分

$a_{n+1}=2a_n+1$，$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，$a_1=1$，所以$a_1+1=2\neq0$，所以$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，因此数列$\{a_n+1\}$是以2为首项，2为公比的等比数列. …………………… 5分

(2)由(1)知，$a_n+1=2^n$，…………………… 6分

$a_n=2^n-1\geqslant2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，$\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$，当且仅当$n=1$时取等号. …………………… 7分

当$n=1$时，$\frac{1}{a_1}=1<2$；

当$n\geqslant2$时，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2.$

因此，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}<2$. …………………… 10分

18. **解**：(1)把函数$y=f(x)$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，得到$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，…………………… 3分

然后再把所得到的图象上所有点向右平行移动$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到$y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

即$g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. …………………… 5分

(2)由(1)得$y=f(x)+g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，…………………… 6分

令$t=x+\frac{\pi}{3}$，则$x=t-\frac{\pi}{3}$，$y=\sin t+\sin\left[2\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin t+\sin\left(2t-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin t+\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin t-\cos 2t=\sin t-(1-2\sin^2t)=2\sin^2t+\sin t-1$，…………………… 8分

令$\sin t=m$，则$y=2m^2+m-1=2\left(m+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$，

由$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$及$t=x+\frac{\pi}{3}$，得$t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，$-\frac{1}{2}\leqslant\sin t\leqslant1$，即$-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant1$，…………………… 10分

当$m=-\frac{1}{4}$，即$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}$时，$y_{\min}=-\frac{9}{8}$，当$m=1$，即$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$，$x=\frac{\pi}{6}$时，$y_{\max}=2$. ……… 12分

19. **解**：(1)$\triangle ABC$是直角三角形，证明如下：由正弦定理，及$\sin^2B-\sin^2A=\sin A\sin C$，得$b^2-a^2=ac$. …… 2分

根据 $A=\frac{\pi}{6}$ 以及余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$, …………………………… 4 分

所以 $ac+c^2-\sqrt{3}bc=0$, $b=\frac{a+c}{\sqrt{3}}$,于是 $\left(\frac{a+c}{\sqrt{3}}\right)^2=a^2+ac$, $2a^2+ac-c^2=0$, $(2a-c)(a+c)=0$,

所以 $c=2a$, $b^2=a^2+2a^2=3a^2$,因此 $c^2=a^2+b^2$, $\triangle ABC$ 为直角三角形.…………………………… 6 分

(2)由 $c=2$,以及由(1)得 $c=2a$, $b=\sqrt{3}a$, $\angle C=90^\circ$,可得 $a=1$, $b=\sqrt{3}$. …………………………… 8 分

设 $CD=x$, $0\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$,则 $BD=\sqrt{x^2+1}$, $AD=\sqrt{3}-x$,且由 $\triangle ABD$ 的周长为 $\frac{7+3\sqrt{3}}{3}$,得 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3}-x+2=\frac{7+3\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{x^2+1}=x+\frac{1}{3}$,解得 $x=\frac{4}{3}$, …………………………… 10 分

所以 $CD=\frac{4}{3}$, $BD=\sqrt{x^2+1}=\frac{5}{3}$, $\triangle BCD$ 周长为 $BC+CD+BD=1+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=4$. …………………………… 12 分

20.**解**:(1)由 $S_n=\frac{(3+a_n)n}{2}$,得 $2S_n=(3+a_n)n$,当 $n\geqslant2$ 时, $2S_{n-1}=(n-1)(a_{n-1}+3)$,根据 $a_n=S_n-S_{n-1}$,得 $2a_n=n(a_n+3)-(n-1)(a_{n-1}+3)$,即 $(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}=-3$. …………………………… 2 分

当 $n\geqslant3$ 时, $\frac{a_n}{n-1}-\frac{a_{n-1}}{n-2}=\frac{-3}{(n-1)(n-2)}$,即 $\frac{a_n}{n-1}-\frac{a_{n-1}}{n-2}=3\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}\right)$, …………………………… 4 分

所以 $\frac{a_3}{2}-\frac{a_2}{1}=3\left(\frac{1}{2}-1\right)$,

$\frac{a_4}{3}-\frac{a_3}{2}=3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$,

$\frac{a_5}{4}-\frac{a_4}{3}=3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$,

……,

$\frac{a_n}{n-1}-\frac{a_{n-1}}{n-2}=3\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}\right)$,

分别相加,得 $\frac{a_n}{n-1}-\frac{a_2}{1}=3\left(\frac{1}{n-1}-1\right)$.又 $a_2=5$,所以 $\frac{a_n}{n-1}-5=3\left(\frac{1}{n-1}-1\right)$,即 $a_n=2n+1(n\geqslant3)$,当 $n=1$ 时, $2a_1=a_1+3$, $a_1=3$,所以 $a_1=3$, $a_2=5$ 符合上式,所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$, $n\in\mathbf{N}^*$. ……… 6 分

(2)不存在.证明如下:假设存在正整数 m, n,则 $a_n=2n+1$, $a_m=2m+1$,

$a_{3n+1}=2(3n+1)+1=6n+3=3(2n+1)$, $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2n+1}$,

$\frac{1}{a_m}=\frac{1}{2m+1}$, $\frac{1}{a_{3n+1}}=\frac{1}{3(2n+1)}$, …………………………… 8 分

由 $\frac{1}{a_n}$, $\frac{1}{a_m}$, $\frac{1}{a_{3n+1}}$ 成等差数列,得 $\frac{2}{a_m}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{3n+1}}$, $\frac{2}{2m+1}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)}$, $\frac{2}{2m+1}=\frac{4}{3(2n+1)}$, $2(2m+1)=3(2n+1)$,其中等式左边 $2(2m+1)$ 是偶数,等式右边 $3(2n+1)$ 是奇数,等式不成立,即假设不成立,因此不存在这样的正整数 m, n. …………………………… 12 分

21.(1)**解**: $f(x)$, $g(x)$ 的定义域为 $x\in(0,+\infty)$.设函数 $f(x)$ 的零点为 x_0, $x_0>0$,则 $x_0+\ln x_0=0$, $\ln x_0=-x_0$, $e^{-x_0}=x_0$, $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$. …………………………… 2 分

$g(x_0)=e^{x_0}\ln x_0+a=\frac{1}{x_0}\times(-x_0)+a=-1+a$,因为函数 $f(x)$ 的零点是函数 $g(x)$ 的零点,所以 $g(x_0)=0$,

因此 $a=1$. …………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)**证明**:$g'(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$,令 $h(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$,则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$,令 $h'(x)>0$,得$x>1$,令 $h'(x)<0$,则 $0<x<1$,所以 $h(x)$在$(0,1)$是减函数,在$(1,+\infty)$是增函数. ………………… 8 分

所以 $h(x)$有最小值 $h(1)=1>0$,即 $h(x)>0$,

于是 $g'(x)=e^xh(x)>0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$是增函数,

由 $g\left(\dfrac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}}\ln\dfrac{1}{e}+1=1-e^{\frac{1}{e}}<1-e^0=0$,$g(1)=1>0$,所以 $g(x)$有唯一零点. ………………………… 12 分

22.**解**:(1)当 $a=2$ 时,$f(x)=e^x(x+1)$,$f(0)=1$, ………………………………………………………… 1 分

$f'(x)=e^x(x+2)$,$f'(0)=2$, …………………………………………………………………………… 2 分

函数 $y=f(x)$的图象在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y-1=2(x-0)$,即 $2x-y+1=0$. ………………… 4 分

(2)对任意 $x\leqslant 0$,有 $f(x)\geqslant ax+1$,即 $e^x[(a-1)x+1]-ax-1\geqslant 0$,令 $g(x)=e^x[(a-1)x+1]-ax-1$,则有对任意 $x\leqslant 0$,$g(x)\geqslant 0$. ……………………………………………………………………………… 5 分

$g'(x)=e^x[(a-1)x+a]-a=(a-1)xe^x+a(e^x-1)$,

当 $a\geqslant 1$,且 $x\leqslant 0$ 时,$(a-1)xe^x\leqslant 0$ 以及 $a(e^x-1)\leqslant 0$,所以 $g'(x)\leqslant 0$,所以 $g(x)$在$(-\infty,0)$是减函数,对任意 $x\leqslant 0$,有 $g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意; ……………………………………………………………… 7 分

令 $h(x)=g'(x)=(a-1)xe^x+a(e^x-1)$,则 $h'(x)=e^x[(a-1)x+2a-1]$,

当 $a<\dfrac{1}{2}$时,$\dfrac{1-2a}{a-1}<0$,令 $h'(x)<0$,即 $e^x[(a-1)x+2a-1]<0$,$(a-1)x+2a-1<0$,$\dfrac{1-2a}{a-1}<x\leqslant 0$,

所以 $h(x)$在$\left(\dfrac{1-2a}{a-1},0\right]$是减函数,当$\dfrac{1-2a}{a-1}<x<0$ 时,有 $h(x)>h(0)=0$,即 $g'(x)>0$,

所以 $g(x)$在$\left(\dfrac{1-2a}{a-1},0\right)$是增函数,当$\dfrac{1-2a}{a-1}<x<0$ 时,$g(x)<g(0)=0$,这与 $\forall x\leqslant 0$,$g(x)\geqslant 0$ 矛盾,不符合题意; ……………………………………………………………………………………………… 9 分

当$\dfrac{1}{2}\leqslant a<1$ 时,$a-1<0$,$2a-1\geqslant 0$,当 $x\leqslant 0$ 时,$(a-1)x+2a-1\geqslant 0$,$h'(x)\geqslant 0$,所以 $h(x)$在$(-\infty,0]$是增函数,$h(x)\leqslant h(0)=0$,即 $g'(x)\leqslant 0$,所以 $g(x)$在$(-\infty,0]$是减函数,对任意 $x\leqslant 0$,有 $g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意.

因此实数 a 的取值范围是$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. ……………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。