

7. 已知圆锥的底面半径为 4, 母线长为 5, 其顶点和底面圆周均在同一个球的球面上, 则该球的表面积为

- A. $\frac{625\pi}{36}$ B. $\frac{625\pi}{12}$ C. $\frac{625\pi}{9}$ D. $\frac{625\pi}{3}$

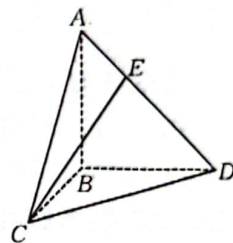
8. 已知实数 x, y 满足 $2x^2 - 2xy + y^2 + \frac{1}{x^2} - 4x - \frac{4}{x} + 6 = 0$, 则

- A. $x > 2y$
 B. $x < 2y$
 C. $y^2 < x$
 D. $y^2 > x$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, BA, BC, BD 两两垂直, $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AD}$, 则

- A. 向量 \vec{CE} 在向量 \vec{BD} 上的投影向量为 $\frac{1}{3}\vec{BD}$
 B. 向量 \vec{CE} 在向量 \vec{BD} 上的投影向量为 $\frac{2}{3}\vec{BD}$
 C. 向量 $\vec{CE} = \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{BD} - \vec{BC}$
 D. 向量 $\vec{CE} = \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BD} - \vec{BC}$



10. 下列函数中, 存在两个极值点的是

- A. $f(x) = (x^2 + x + 2)e^x$
 B. $f(x) = x^2 e^x$
 C. $f(x) = \frac{x^2 + x}{e^x}$
 D. $f(x) = \frac{x}{e^x}$

11. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上恰有 10 个零点, 则 ω 的值可能为

- A. 50 B. 54 C. 51 D. 58

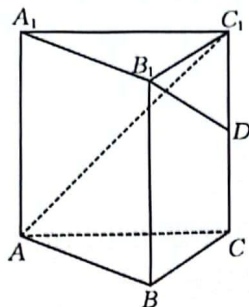
12. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 3x \lg x}{1 + x^3 \lg x}$ 的值域为 $[n, m]$, $n < 0, m > 0, m + n > 0$, 则下列函数的最大值为 m 的是

- A. $g(x) = \frac{x^4 + 6x^2 \lg x}{1 + 2x^6 \lg x}$
 B. $g(x) = \frac{x^4 + 2x^2(3 - x^4) \lg x - 1}{1 + 2x^6 \lg x}$
 C. $g(x) = \frac{x - 3x^2 \lg x}{x^3 - \lg x}$
 D. $g(x) = \frac{3x^2 \lg x - x}{x^3 - \lg x}$

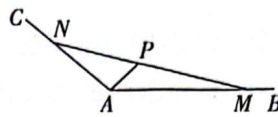
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知 a, b 均为单位向量,且 $a \cdot b = \frac{3}{5}$, 则 $|a-b| = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. 如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, $AB=BC=AA_1=2$, D 是 CC_1 的中点,则异面直线 AC_1 与 B_1D 所成角的余弦值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.



第 14 题图



第 16 题图

15. 若 $\forall x_1, x_2 \in [2, 4]$, 当 $x_1 < x_2$ 时, $e^{x_1 - x_2} > (\frac{x_2}{x_1})^a$, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

16. 某景区的平面图如图所示,其中 AB, AC 为两条公路, $\angle BAC = 135^\circ$, P 为景点, $AP = 10$, $AP \perp AC$, 现需要修建一条经过景点 P 的观光路线 MN , M, N 分别为 AB, AC 上的点, 则 $\triangle AMN$ 面积的最小值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_3 = -18, S_2 = 5a_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n 的最小值.

18. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \cos C + c \cos A = \frac{\sqrt{3} b \tan B}{3}$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $a, b, 2c$ 成等比数列, 求 $\frac{\sin A}{\sin C} + \frac{c}{a}$.

19. (12分)

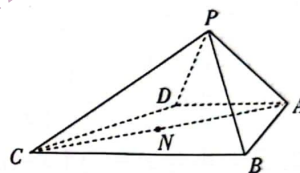
已知函数 $f(x) = 2x \sin x - x^2 \cos x$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\pi, f(\pi))$ 处的切线方程;
- (2) 求 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的最值.

20. (12分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $BC = 2AD = 2\sqrt{2}$, $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 均为正三角形.

- (1) 证明: $AD \parallel$ 平面 PBC .
- (2) 证明: $PB \perp$ 平面 PCD .
- (3) 设平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = l_1$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $PBC = l_2$, 若直线 l_1 与 l_2 确定的平面为平面 α , 线段 AC 的中点为 N , 求点 N 到平面 α 的距离.



21. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} = \frac{n(n+1)}{2}$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $b_n = \frac{1}{na_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $S_n < \frac{5}{4}$.

22. (12分)

已知 x_1, x_2 是函数 $f(x) = 2(x-1) \ln x - m(x+1)$ 的两个零点, 且 $x_1 < x_2$.

- (1) 求实数 m 的取值范围;
- (2) 证明: $(m+1)x_1 < x_2$.