2023年普通高等学校招生全国统一考试
11月调研测试卷　数学参考答案

一、选择题：

1~8　CBDC　BADC

第7题解析：由 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}-2$，得 $\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}-2$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$．所以

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\sqrt{3}$．

第8题解析：C 经过原点的切线 $l:y=\mathrm{e}x$，由题意，$\mathrm{e}^b-1=\mathrm{e}b$，结合图形知 $b>0$．令 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x-1$，$x>0$，

则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增．因为 $f(1)=-1<0$，

$f(2)=\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}-1>0$，所以 $1<b<2$．

二、选择题：

9．ABD　10．AC　11．BCD　12．BC

第12题解析：由 $f(x+1)=2-f(x)$，得 $f(x+2)=2-f(x+1)$，所以 $f(x+2)=f(x)$，$f(x)$ 是周期为2的周期函数，所以选项B正确．由 $f(x+2)=2-f(-x)$ 知 $f(2)=2-f(0)$，又因为 $f(0)=f(2)$，所以 $f(2)=1$，选项C正确．取 $f(x)=-\sin\pi x+1$ 符合题意，此时 $f(x)$ 不是偶函数，且 $f(\frac{1}{2})=0$，所以A，D错误．

三、填空题：

13．132°（或 -48° 答案合理即可）　14．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　15．8　16．$(0,+\infty)$，$[2,3]$

第16题解析：当 $a=2$ 时，$f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|, & x\geqslant 2,\\ \frac{x-2}{x-3}, & x<2.\end{cases}$ 当 $x<2$ 时，$f(x)=\frac{x-2}{x-3}\in(0,1)$，当 $x\geqslant 2$ 时，

$f(x)=|\log_2 x|=\log_2 x\in[1,+\infty)$，所以当 $a=2$ 时，$f(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$．

画出 $f(x)$ 的图象，当 $a<2$ 或 $a>3$ 时，存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，

当 $2\le a\le 3$ 时，不存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$．

四、解答题：

17．（10分）

解：（1）设公差为 d，由题设，$a_1+4d=-3$，$5a_1+10d=0$，

解得 $a_1=3$，$d=-\frac{3}{2}$．

所以 $a_n=\frac{3(3-n)}{2}$．　……5分

（2）由（1）得 $S_n=\dfrac{3n(5-n)}{4}$，由题设，$\dfrac{9n(5-n)(3-n)}{8}<0$，$n(n-5)(n-3)<0$

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=4$． ……10 分

18.（12 分）

解：$f(x)=2\sin x[\cos x-\cos(x+\dfrac{\pi}{2})]-1$

$=2\sin x\cos x+2\sin^2 x-1$

$=\sin 2x-\cos 2x$． ……3 分

（1）$f(\dfrac{\pi}{6})=\sin\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}$． ……5 分

（2）$f(x)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})$．

令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x-\dfrac{\pi}{4}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\dfrac{\pi}{8}\le x\le k\pi+\dfrac{3\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$．

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{3\pi}{8})$ 单调递增，在 $(\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{7\pi}{8})$ 单调递减，在 $(\dfrac{7\pi}{8},\dfrac{11\pi}{8})$ 单调递增．

由题设，$\dfrac{3\pi}{8}<m\le\dfrac{7\pi}{8}$． ……12 分

19.（12 分）

解：（1）由题设及正弦定理，得 $\sin B=2\sin A\cos B-2\sin C$

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=2\sin A\cos B-2\sin(A+B)$，

$\sin B=-2\cos A\sin B$．

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\ne 0$，

故 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$．

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$． ……6 分

（2）由 $a\cos C=\sqrt{3}$ 及余弦定理，得 $a\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\sqrt{3}$，即 $a^2-c^2=2\sqrt{3}-1$，

又由余弦定理，得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，即 $a^2=1+c^2+c$．

所以 $c=2\sqrt{3}-2$． ……12 分

20.（12 分）

解：（1）$f'(x)=\dfrac{-ax^2+(2a-b)x+b-1}{\mathrm{e}^x}$，由题设，

$f(-1)+f'(-1)=\dfrac{a-b+1}{e^{-1}}+\dfrac{-3a+2b-1}{e^{-1}}=0$，

所以 $b=2a$．　　……5 分

（2）因为 $f(|-x|)=f(|x|)$，所以 $f(|x|)$ 是偶函数．

只需证明：当 $x\geq 0$ 且 $a\leq\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)\leq 1$．

由（1）知，$f(x)=\dfrac{ax^2+2ax+1}{e^x}$．

当 $x\geq 0$ 且 $a\leq\dfrac{1}{2}$ 时，则 $f(x)\leq\dfrac{\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}$．

令 $g(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}$，$x\geq 0$，

则 $g'(x)=-\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}\leq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，“$=$”成立．

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减，$g(x)\leq g(0)=1$，

从而，当 $x\geq 0$ 且 $a\leq\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)\leq 1$．

综上，当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(|x|)\leq 1$．　　……12 分

21．（12 分）

解：（1）当 $k=1$ 时，a_2,a_3,a_4 成等比数列，公比 $q_1=\dfrac{1}{2}$，

所以 $a_4=a_2q_1^2=\dfrac{1}{4}$．

当 $k=2$ 时，a_4,a_5,a_6 成等比数列，公比 $q_2=\dfrac{2}{3}$，

所以 $a_6=a_4q_2^2=\dfrac{1}{9}$．

$$a_{2n}=a_2\cdot\frac{a_4}{a_2}\cdot\frac{a_6}{a_4}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}$$

$$=1\cdot q_1^2\cdot q_2^2\cdots q_{n-1}^2$$

$$=1\cdot(\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{2}{3})^2\cdots(\frac{n-1}{n})^2$$

$$=\frac{1}{n^2}．$$　　……6 分

（2）由题设及（1），$a_{2k+1}=a_{2k}\cdot q_k=\dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{1}{k(k+1)}$，

$n=1$时，$a_1<1$.

$n\geq 2$时，$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$.

$$=a_1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

$$=a_1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$=a_1+1-\frac{1}{n}.$$

由题设，$a_1<\frac{1}{n}$对$n\geq 2$，$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，所以$a_1\leq 0$.

综上，$a_1\leq 0$. ……12 分

22.（12 分）

解：（1）由题设，$x<0$，$f'(x)=\ln(-x)+1$.

令$f'(x)>0$，解得$x<-\frac{1}{\mathrm{e}}$；令$f'(x)<0$，解得$-\frac{1}{\mathrm{e}}<x<0$.

所以，$f(x)$在$(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}})$单调递增，在$(-\frac{1}{\mathrm{e}},0)$单调递减.

当$x=-\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$f(x)$有极大值$\frac{1}{\mathrm{e}}$；$f(x)$无极小值. ……4 分

（2）$g(x)=xf(ax)-\mathrm{e}^{x-2}=ax^2\ln(-ax)-\mathrm{e}^{x-2}$.

当$a>0$时，$x<0$.

令$h(x)=a\ln(-ax)-\frac{\mathrm{e}^{x-2}}{x^2}$，则$h'(x)=\frac{a}{x}-\frac{(x-2)\mathrm{e}^{x-2}}{x^3}=\frac{1}{x}[a-\frac{(x-2)\mathrm{e}^{x-2}}{x^2}]$.

因为$x<0$，所以$\frac{(x-2)\mathrm{e}^{x-2}}{x^2}<0$.

又因为$a>0$，所以$h'(x)<0$，$h(x)$在$(-\infty,0)$单调递减.

$$h(-\frac{\mathrm{e}}{a}-1)=a\ln(\mathrm{e}+a)-\frac{a^2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}}{a}-3}}{(\mathrm{e}+a)^2}>a[\ln(\mathrm{e}+a)-\frac{a}{(\mathrm{e}+a)^2}]>0,$$

$$h(-\frac{1}{a})=-a^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}-2}<0.$$

所以$h(x)$在$(-\infty,0)$上存在唯一零点. ……8 分

当$a<0$时，$x>0$.

由（1）知，$f(ax)\leq\frac{1}{\mathrm{e}}$，当且仅当$x=-\frac{1}{a\mathrm{e}}$时，“=”成立.

令 $\varphi(x)=e^{x-1}-x$，$x>0$，则 $\varphi'(x)=e^{x-1}-1$．

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增．

所以 $\varphi(x)\geq\varphi(1)=0$，即 $e^{x-1}\geq x$，当且仅当 $x=1$ 时，"$=$" 成立．

所以 $g(x)=xf(ax)-e^{x-2}\leq\dfrac{x}{e}-e^{x-2}=\dfrac{x-e^{x-1}}{e}\leq 0$，当且仅当 $a=-\dfrac{1}{e}$ 且 $x=1$ 时，"$=$" 成立．

所以，当 $a=-\dfrac{1}{e}$ 时，$g(x)$ 存在唯一零点；当 $a<0$ 且 $a\neq-\dfrac{1}{e}$ 时，$g(x)$ 不存在零点．

综上，当 $a>0$ 或 $a=-\dfrac{1}{e}$ 时，$g(x)$ 存在唯一零点；当 $a<0$ 且 $a\neq-\dfrac{1}{e}$ 时，$g(x)$ 不存在零点．

……12 分