高三联考数学参考答案(理科)

1. C　因为 $B=\{x|x^2>2x\}=\{x|x<0$ 或 $x>2\}$,所以 $A\cap B=\{3\}$.

2. D　p 的否定是 $\forall x\in\mathbf{Q},\frac{1}{x^2}\notin\mathbf{Q}$. q 的否定是 $\exists x\in\mathbf{Q},\frac{1}{x^2}\notin\mathbf{Q}$.

3. A　要得到函数 $y=\sin(x+1)$的图象,只需要将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 1 个单位长度.

4. A　由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向,由 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 可知,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,所以“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$”是“存在非零实数 x,y,使得 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$”的充分不必要条件.

5. A　取 $x=\frac{\pi}{2}$,则 $\sin x=1$,故命题 p 为真,$y=e^x$ 的图象恒在 $y=\ln x$ 的图象上方,故命题 q 为真,所以 $p\wedge q$ 为真,$(\neg p)\wedge q$ 为假,$p\wedge(\neg q)$为假,$(\neg p)\wedge(\neg q)$为假.

6. A　由题可知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0,|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$. 因为 D 是边 BC 上一点,且 $CD=3BD$,所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}^2=-1$.

7. B　$\frac{(\sin\theta+\cos\theta)\cos 2\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta}\cdot\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=$ [illegible].

8. A　因为 $f(x+1)$是奇函数,所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$,则 $f(1)=0$. 又 $f(2x+3)$是偶函数,所以 $f(-2x+3)=f(2x+3)$,所以 $f(5)=f(1)=0$.

9. D　因为 $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{1}{\cos\alpha}$,所以$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\alpha}$,所以 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\beta$,即 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)$. 又 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}),\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\beta$,即 $2\beta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}-\beta=\pi$,即 $\alpha=\frac{\pi}{2}$(舍去).

10. C　令 $g(x)=f(x)-1=x^3+x$,则 $g(x)$是奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,由 $f(1-x)+f(2x)>2$,可得$g(1-x)+1+g(2x)+1>2$,即 $g(1-x)>-g(2x)=g(-2x)$,则 $1-x>-2x$,解得 $x>-1$.

11. B　由函数 $f(x)=\sin 2x-a\cos 2x$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{8}$对称,得 $f(\frac{3\pi}{8})=\pm\sqrt{1+a^2}$,则 $\frac{\sqrt{2}(a+1)}{2}=\pm\sqrt{1+a^2}$,解得 $a=1$,$\frac{|x_2-x_1|}{a}=|x_2-x_1|$,所以 $f(x)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$. 又由 $f(x)_{\max}=\sqrt{2}$,可得 $f(x_1)=f(x_2)=\sqrt{2}$,所以$\frac{|x_2-x_1|}{a}$的最小值为 $T=\pi$.

12. D　设 $f(x)=x-\sin x(0<x<\frac{\pi}{2})$,$f'(x)=1-\cos x>0$,则 $f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上为增函数,故 $f(x)=x-\sin x>f(0)=0$,即 $x>\sin x(0<x<\frac{\pi}{2})$,所以 $\sin\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{5}$.

设 $g(x)=e^{x-1}-x,x\in(0,1)$,则 $g'(x)=e^{x-1}-1<0$,故 $g(x)=e^{x-1}-x,x\in(0,1)$为减函

数，$g(x)>g(1)=0$，即 $e^{x-1}>x$，$x\in(0,1)$，故 $e^{-\frac{1}{4}}=e^{\frac{3}{4}-1}>\frac{3}{4}$，所以 $b>a$.

又因为 $c^8-b^8=\frac{1}{6}-\frac{1}{e^2}>0$，所以 $c>b$. 综上，$a<b<c$.

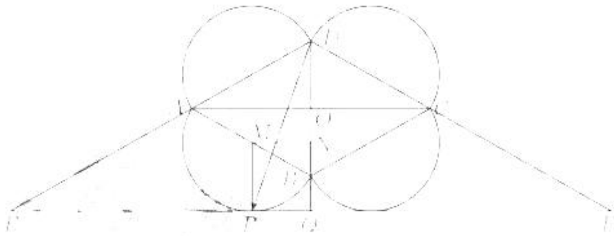
13. $y=3x-3$　因为 $f(x)=\frac{x^3-1}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{3x^3-(x^3-1)}{x^2}=\frac{2x^3+1}{x^2}$，则 $f(1)=0$，$f'(1)=3$，所以所求切线的方程为 $y-0=3(x-1)$，即 $y=3x-3$.

14. $[0,400)$　当 $m=0$ 时，$100>0$ 恒成立，符合题意. 当 $m\neq0$ 时，由 $\begin{cases}m>0,\\ m^2-400m<0,\end{cases}$ 解得 $0<m<400$. 故 m 的取值范围是 $[0,400)$.

15. $[2,4)$　因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $0\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi\omega}{2}$，所以 $\pi\leqslant\frac{\pi\omega}{2}<2\pi$，解得 $2\leqslant\omega<4$，

因此实数 ω 的取值范围是 $[2,4)$.

16. $\frac{5}{2}$　如图，设 $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DF}=k\overrightarrow{DC}$，$P$ 是直线 EF 上一点，令 $\overrightarrow{DP}=x\overrightarrow{DE}+y\overrightarrow{DF}$，则 $x+y=1$，$\lambda+\mu=k(x+y)=k$. 因为 P 是四个半圆弧上的一动点，所以当 EF 与图形下面两个半圆相切时，$\lambda+\mu$ 取得最大值. 设线段 AB 的中点为 M，线段 AC 的中点为 O_1，连接 MP，连接 DO_1 并延长使之与 EF 交于点 O_2，过 M 作 $MN\perp DO_2$，垂足为 N. 因为 $\angle ABC=120^\circ$，$AB=2$，所以



$DO_1=1$，$O_1O_2=O_1N+NO_2=O_1N+MP=\frac{3}{2}$，则 $DO_2=\frac{5}{2}$.

由 $\triangle DAC\sim\triangle DEF$，得 $k=\frac{DE}{DA}=\frac{DO_2}{DO_1}=\frac{5}{2}$，故 $\lambda+\mu$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$.

17. 解：(1)由图可得，$f(x)$ 的最小正周期 $T=4\times(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6})=\pi$.

因为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，且 $\omega>0$，所以 $\omega=2$. ………………………… 2 分

因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称，

所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. ………………………… 4 分

故 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$. ………………………… 5 分

(2)由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $-\frac{\pi}{3}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$. ………………………… 7 分

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，最大值为 2； ………………………… 8 分

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

当 $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $-\sqrt{3}$. ………………………… 9 分

故 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3},2]$. ………………………………………………… 10 分

18. 解：(1) $f(x)=ax^4+bx^3$，$f'(x)=4ax^3+3bx^2$，………………………………………………… 1 分

因为 $f(x)=ax^4+bx^3$ 在 $x=1$ 处取得极值 -1，

所以 $f(1)=a+b=-1$，$f'(1)=4a+3b=0$，………………………………………………………… 3 分

解得 $a=3$，$b=-4$，经验证，$f(x)=3x^4-4x^3$ 在 $x=1$ 处取得极值 -1，故 $a=3$，$b=-4$. …
…………………………………………………………………………………………………… 5 分

(2) $g'(x)=f'(x)-m=12x^3-12x^2-m\geqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，即 $m\leqslant 12x^3-12x^2$ 在 $x\in[-1,1]$ 内恒成立. ……………………………………………………………………………… 6 分

令 $h(x)=12x^3-12x^2$，$x\in[-1,1]$，

则 $h'(x)=12x(3x-2)$，令 $h'(x)>0$，得 $-1<x<0$ 或 $\frac{2}{3}<x<1$，

所以 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(\frac{2}{3},1)$ 上单调递增，在 $(0,\frac{2}{3})$ 上单调递减. ………………………… 8 分

因为 $h(-1)=-24$，$h(\frac{2}{3})=-\frac{16}{9}$，所以 $h(x)_{\min}=-24$. ……………………………………… 10 分

所以 $m\leqslant -24$，即 m 的取值范围为 $(-\infty,-24]$. ……………………………………………… 12 分

19. 解：(1) 因为 $f(x)=$ [illegible] $-a$，

所以 $f(x)+f(1-x)=$ [illegible] $-a+$ [illegible] $-a=1-2a$. ……………………………………… 5 分

因为 $\lg 2+\lg 5=1$，所以 $f(\lg 2)+f(\lg 5)=1-2a=$ [illegible]，……………………………………… 7 分

则 $a=1$. …………………………………………………………………………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 可知，$f(x)\geqslant 4^x+m$ 等价于 $(4^x)^2+m\cdot 4^x+2m-2\leqslant 0$. ………………………… 7 分

令 $t=4^x$，则 $t\in[\frac{1}{4},4]$，………………………………………………………………………… 8 分

原不等式等价于 $t^2+mt+2m-2\leqslant 0$ 在 $[\frac{1}{4},4]$ 上恒成立，……………………………………… 9 分

则 $\begin{cases}\frac{1}{16}+\frac{1}{4}m+2m-2\leqslant 0,\\ 16+4m+2m-2\leqslant 0,\end{cases}$ ………………………………………………………… 11 分

解得 $m\leqslant -\frac{7}{3}$，故 m 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{7}{3}]$. …………………………………………… 12 分

20. 解：(1) $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ ……………… 2 分

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，………………………………………… 3 分

$\because 2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，……………………………………………… 4 分

$\therefore k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$. ………………………………… 6分

(2)由(1)知，$f(x_0)=2\sin(2x_0+\frac{\pi}{6})$，

又 $\because f(x_0)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\sin(2x_0+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，………………………………………………… 8分

$\because x_0\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$，则 $2x_0+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}]$，

$\therefore\cos(2x_0+\frac{\pi}{6})<0$，$\therefore\cos(2x_0+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，……………………………………………… 9分

则 $\cos 2x_0=\cos[(2x_0+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}]=\cos(2x_0+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\sin(2x_0+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$ ……… 11分

$=(-\frac{\sqrt{6}}{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}$. ……………………………………………………… 12分

21. 证明：(1) $f'(x)=6x^2-ae^x$, ……………………………………………………………… 1分

则 $f'(0)=-a$. ……………………………………………………………………………… 2分

又 $f(0)=-a$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-(-a)=-ax$，………
…………………………………………………………………………………………… 3分

即 $y=-a(x+1)$，所以切线经过定点 $(-1,0)$. ……………………………………………… 5分

(2)当 $a\in(-\infty,0]$ 时，$f'(x)=6x^2-ae^x>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，………………… 6分

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无极值. ……………………… 7分

当 $a\in[\frac{24}{e^2},+\infty)$ 时，$f'(x)=e^x(\frac{6x^2}{e^x}-a)$，设函数 $g(x)=\frac{6x^2}{e^x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{6x(2-x)}{e^x}$.

若 $0<x<2$，则 $g'(x)>0$；若 $x>2$，则 $g'(x)<0$. ………………………………………… 8分

所以 $g(x)_{\max}=g(2)=\frac{24}{e^2}$，…………………………………………………………… 9分

所以当 $a\in[\frac{24}{e^2},+\infty)$ 时，$\frac{6x^2}{e^x}-a\leqslant 0$，所以 $f'(x)=e^x(\frac{6x^2}{e^x}-a)\leqslant 0$，………………… 10分

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无极值. ……………… 11分

综上，当 $a\in(-\infty,0]\cup[\frac{24}{e^2},+\infty)$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无极值. ……………………… 12分

22. (1)解：$f'(x)=\frac{2a}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2ax-1}{x^2}$. ………………………………………… 1分

设函数 $g(x)=-x^2+2ax-1$，$\Delta=4a^2-4$.

当 $\Delta\leqslant 0$，即 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时，此时 $g(x)\leqslant 0$，则 $f'(x)\leqslant 0$，………………………………… 2分

则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$. ………………………………… 3分

当 $\Delta>0$，即 $a>1$ 或 $a<-1$ 时，若 $a<-1$，$g(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，由韦达定理得 $x_1+x_2=2a<0$，$x_1x_2=1>0$，则 x_1,x_2 均小于零，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

则 $f(x)\leqslant f(1)=0$；…………………………………………………………… 4 分

若 $a>1$，则 $x_1+x_2=2a>2$，$x_1x_2=1>0$，则可设 $0<x_1<1<x_2$，当 $x\in(1,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，则 $f(x)>f(1)=0$，不符合题意. ………………………………………… 5 分

综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. …………………………………………………… 6 分

(2)证明：因为 $\forall x\in(1,+\infty)$，$\ln x>0$，

所以 $\forall a\in(1,+\infty)$，$\forall x\in(1,+\infty)$，$f(x)>2\ln x-x+\frac{1}{x}$. ………………………… 7 分

要证 $\forall a\in(1,+\infty)$，$\forall x\in(1,+\infty)$，$f(x)>-(x-1)^2$，只需证 $\forall a\in(1,+\infty)$，$\forall x\in(1,+\infty)$，$2\ln x-x+\frac{1}{x}>-(x-1)^2$. ………………………………………………… 8 分

设函数 $h(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}+(x-1)^2=2\ln x+x^2-3x+\frac{1}{x}+1(x>1)$，

则 $h'(x)=\frac{2}{x}+2x-3-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-3x^2+2x-1}{x^2}=\frac{2x^3-2x^2-x^2+2x-1}{x^2}=\frac{2x^2(x-1)-(x-1)^2}{x^2}=\frac{(x-1)(2x^2-x+1)}{x^2}$. …………………………………………………… 9 分

因为 $2x^2-x+1>0$，所以 $h'(x)>0$. ………………………………………………………… 10 分

所以 $h(x)$ 为增函数，则 $h(x)>h(1)=0$. …………………………………………………… 11 分

所以 $\forall a\in(1,+\infty)$，$\forall x\in(1,+\infty)$，$2\ln x-x+\frac{1}{x}>-(x-1)^2$.

故 $\forall a\in(1,+\infty)$，$\forall x\in(1,+\infty)$，$f(x)>-(x-1)^2$. ………………………………… 12 分

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。