2024届高三仿真模拟考试(二) 全国卷

文科数学试题

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟,满分150分

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x|y=\ln(x-1)\}$,$B=\{x|x^2+2x-3\geqslant 0\}$,则 $A\cap B=$

A.$(1,3)$　　B.$(1,+\infty)$　　C.$[3,+\infty)$　　D.$[-1,1)$

2.已知 $(1-\mathrm{i})z=4+2\mathrm{i}$(i为虚数单位),则 $|z|=$

A.$\sqrt{10}$　　B.10　　C.$\sqrt{5}$　　D.5

3.命题"$\forall x\in(1,2)$,$\log_2 x-a<0$"为真命题的一个充分不必要条件是

A.$a\geqslant 0$　　B.$a\geqslant 2$　　C.$a\geqslant 1$　　D.$a\leqslant 4$

4.已知直线 $l:mx+(5-2m)y-2=0(m\in\mathbf{R})$ 和圆 $O:x^2+y^2=4$,则圆心 O 到直线 l 的距离的最大值为

A.$\frac{6}{5}$　　B.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{3}{2}$

5.已知 x,y 满足不等式组 $\begin{cases}y\leqslant x,\\x+y\geqslant 2,\\x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值为

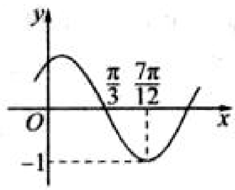
A.2　　B.3　　C.4　　D.6

6.已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=x^2-ax+a-1$,则满足 $f(x)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是

A.$(-\infty,-1]\cup[0,1]$　　B.$[-1,1]$

C.$[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　D.$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

7.函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\text{其中 }A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象如图所示,为了得到 $g(x)=\cos 2x$ 的图象,则只需将 $f(x)$ 的图象



A.向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度　　B.向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

C.向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度　　D.向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

8.若实数 x,y 满足 $4x^2+y^2-xy=3$,则 $4x^2+y^2$ 的最大值为

A.$\sqrt{3}$　　B.8　　C.3　　D.4

9.抛掷两枚质地均匀的正方体骰子,将向上的点数分别记为 a,b,则

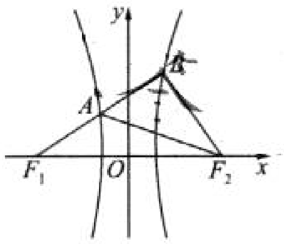
A.$a+b=8$ 的概率为$\frac{1}{6}$　　B.$a+b$ 能被 5 整除的概率为$\frac{7}{36}$

C.ab 为偶数的概率为$\frac{1}{2}$　　D.$a>b$ 的概率为$\frac{1}{2}$

10.在$\triangle ABC$中,$AC=2BC$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$,则 $\sin B=$

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C.$\frac{\sqrt{14}}{4}$　　D.$\frac{\sqrt{15}}{4}$

11.如图所示,点 F_1,F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点,双曲线 C 的右支上存在一点 B 满足 $BF_1\perp BF_2$,BF_1 与双曲线 C 的左支的交点 A 平分线段 BF_1,则双曲线 C 的渐近线斜率为



A.± 3　　B.$\pm 2\sqrt{3}$　　C.$\pm\sqrt{13}$　　D.$\pm\sqrt{15}$

12.已知 A,B,C 三点在半径为 2 的球 O 的球面上,且$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=-2$,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,则直线 AB 与直线 AC 所成角的最大值为

A.30°　　B.45°　　C.60°　　D.75°

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13.已知 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$,则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$________.

14.设 O 为坐标原点,点 $P(2,y_0)$在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$上,若 P 到 C 的准线的距离为$\frac{5}{2}$,则$|OP|=$________.

15.若直线 $ax-y-1=0$ 与曲线 $y=x+\ln x$ 相切,则实数 $a=$________.

16.记函数 $f(x)=A\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+B\ (\omega>0)$的最小正周期为 T,且 $f\left(\frac{T}{2}\right)=1$,$f(T)=3$.若 $x=\frac{\pi}{6}$为 $f(x)$的零点,则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=$________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60分。

17. 为打造“四态融合、产村一体”，望山、见水、忆乡愁的美丽乡村，增加农民收入，某乡政府统计了景区农家乐在2022年2月到8月中任选5个月的接待游客人数 y（单位：千人）的数据，结果如下表：

月份代号 x	2	3	5	7	8
接待游客人数 y（单位：千人）	3	3.5	4	6.5	8

（1）根据数据计算说明变量 x,y 是正相关还是负相关；

（2）求相关系数 r 的值，并说明月份与接待游客人数之间线性关系的强弱（r 值精确到0.01）.

附：线性回归方程 $y=bx+a$ 的斜率的最小二乘法估计公式、相关系数 r 的公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，一般地，当 r 的绝对值大于0.75时认为两个变量之间有较强的线性相关程度.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=25$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=$[illegible]，$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=18.5$，$\sqrt{481}\approx21.9$.

18.（12分）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $2(S_n-n)=na_n$.

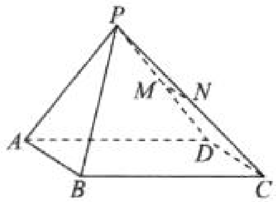
（1）证明：$\{a_n\}$ 为等差数列；

（2）若 $a_1+a_3+\cdots+a_{13}=98$，证明：$\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}<1$.

19.（12分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 PAD 是正三角形，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，M 是线段 PD 的中点，N 是线段 PC 的中点.

（1）求证：$MN\,/\!/$ 平面 PAB；

（2）求 PC 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值.



20.(12分)已知函数 $f(x)=\log_a x+\frac{1}{2}x^2-(1+\log_a e)x,a>1$.

(1)当 $a=e$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2)若 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点,求 a 的取值范围.

21.(12分)已知直线 l_1 过点 $F_1(-\sqrt{2},0)$ 且与圆 $F_2:(x-\sqrt{2})^2+y^2=32$ 交于 B,C 两点,过 F_1C 的中点 D 作垂直于 BC 的直线交 F_2C 于点 P,记 P 的轨迹为曲线 Γ.

(1)求曲线 Γ 的方程;

(2)设曲线 Γ 与 x 轴的交点分别为 A_1,A_2,点 F_1,F_2 关于直线 $y=-x$ 的对称点分别为 E,F,过点 F_2 的直线 l_2 与曲线 Γ 交于 M,N 两点,直线 A_1M,A_2N 相交于点 Q.请判断 $\triangle QEF$ 的面积是否为定值?若是,求出这个值;若不是,请说明理由.

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+t,\\ y=\sqrt{5}+t,\end{cases}$ (t 为参数),以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{5}\sin\theta$.

(1)求圆 C 的直角坐标方程;

(2)设圆 C 与直线 l 交于点 A,B,若点 P 的坐标为 $(3,\sqrt{5})$,求 $|PA|+|PB|$.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=|x-a^2|+2a,a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=2$ 时,求不等式 $f(x)<5$ 的解集;

(2)若 $f(x)\geq x+1$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,求 a 的值.

2024 届高三仿真模拟考试(二)　全国卷

文科数学参考答案及评分意见

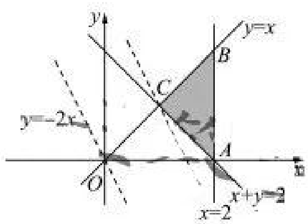
1.B 【解析】由题意 $A=\{x|x-1>0\}=\{x|x>1\}=(1,+\infty)$，$B=\{x|x^2+2x-3\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -3\}$，$\therefore A\cap B=(1,+\infty)$.故选 B.

2.A 【解析】由复数 $(1-\mathrm{i})z=4+2\mathrm{i}$，可得 $z=\frac{4+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(4+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1+3\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.故选 A.

3.B 【解析】因为命题 $\forall x\in(1,2)$，$\log_2 x-a<0$ 是真命题，当 $x\in(1,2)$ 时，$0<\log_2 x<1$，若 $a>\log_2 x$ 恒成立，则 $a\geqslant 1$，结合选项，命题是真命题的一个充分不必要条件是 $a\geqslant 2$.故选 B.

4.B 【解析】由题意，直线 $mx+(5-2m)y-2=0$ 可化为 $m(x-2y)+5y-2=0$，联立方程组 $\begin{cases}x-2y=0,\\5y-2=0,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{4}{5}$，$y=\frac{2}{5}$，即直线 l 恒过定点 $P\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$，又由 $\left(\frac{4}{5}-0\right)^2+\left(\frac{2}{5}-0\right)^2<4$，可得定点 P 在圆内，由圆的几何性质知，圆心到直线的距离 $d\leqslant|OP|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}-0\right)^2+\left(\frac{2}{5}-0\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.故选 B.

5.B 【解析】画出可行域，如图阴影部分所示，当 $z=0$ 时，画出初始目标函数表示的直线 $2x+y=0$，平移目标函数，当目标直线过点 $C(1,1)$ 时，取得最小值 $z_{\min}=2\times 1+1=3$.故选 B.



6.C 【解析】依题意 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=a-1=0$，即 $a=1$，则 $f(x)=x^2-x$，当 $x\geqslant 0$ 时，令 $f(x)\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 1$，根据对称性，当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，故满足 $f(x)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1\}$.故选 C.

7.D 【解析】由图可知，$A=1$，$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，即 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，将 $x=\frac{7\pi}{12}$ 代入可得 $2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，为了得到 $g(x)=\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，可将函数 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度.故选 D.

8.D 【解析】$4x^2+y^2=3+\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot y\leqslant 3+\frac{1}{2}\times\frac{4x^2+y^2}{2}$，所以 $\frac{3}{4}(4x^2+y^2)\leqslant 3$，解得 $4x^2+y^2\leqslant 4$，当且仅当 $2x=y$，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=\sqrt{2}$ 或 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=-\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 $4x^2+y^2$ 的最大值为 4.故选 D.

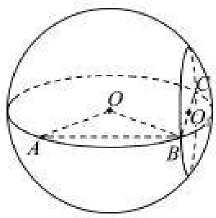
9.B 【解析】试验的样本点总数 $n=6\times 6=36$，对于 A，“$a+b=8$”包含的样本点有：(2,6)，(3,5)，(4,4)，(5,3)，(6,2)共 5 个，所以 $P(a+b=8)=\frac{5}{36}$，故 A 错误；对于 B，“$a+b$ 能被 5 整除”包含的样本点有：(1,4)，(2,3)，(3,2)，(4,1)，(4,6)，(5,5)，(6,4)共 7 个，所以 $P(a+b$ 能被 5 整除$)=\frac{7}{36}$，故 B 正确；对于 C，“ab 为偶数”的对立事

件为："ab 为奇数"，"ab 为奇数"等价于"a 和 b 均为奇数"，所以 $P(ab$ 为奇数$)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，故 $P(ab$ 为偶数$)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，故 C 错误；对于 D，"$a>b$"的对立事件为"$a\leqslant b$"，事件"$a\leqslant b$"包含"$a=b$"和"$a<b$"，易知 $P(a>b)=P(a<b)$，又 $P(a=b)\neq0$，所以 $P(a>b)<P(a\leqslant b)$，所以 $P(a>b)\neq\frac{1}{2}$，故 D 错误.故选 B.

10.C 【解析】记 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，由已知，$b=2a$，因为 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2=\overrightarrow{AC}^2$，所以 $\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2$，即 $c^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+a^2=b^2$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{b^2-(a^2+c^2)}{2}$，因为 $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})^2=\overrightarrow{AB}^2$，所以 $\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2=\overrightarrow{AB}^2$，即 $b^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+a^2=c^2$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$，所以 $b^2-a^2-c^2=-3(a^2+b^2-c^2)$，化简得 $c=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$.所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.故选 C.

11.B 【解析】设 $|AB|=|AF_1|=x(x>0)$，则 $|BF_1|=2x$，由双曲线的定义得 $|BF_2|=2x-2a$，$|AF_2|=x+2a$，又由 $BF_1\perp BF_2$ 得 $|AF_2|^2=|AB|^2+|BF_2|^2$，即 $(x+2a)^2=x^2+(2x-2a)^2$，解得 $x=3a$，所以 $|BF_1|=6a$，$|BF_2|=4a$，在直角$\triangle BF_1F_2$ 中，由勾股定理得 $|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2$，即 $(2c)^2=(6a)^2+(4a)^2$，整理得 $c^2=13a^2$，则 $b^2=c^2-a^2=12a^2$，双曲线 C 的渐近线斜率为 $\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}=\pm2\sqrt{3}$.故选 B.

12.A 【解析】如图，点 C 在过 B 且垂直于 AB 的球的截面上，设该圆圆心为 O_1，半径为 R_2，$OO_1=\sqrt{3}$，$R_2=\sqrt{2^2-3}=1$，设直线 AB 与直线 AC 所成角为 θ，由于 $AB\perp$圆 O_1 所在平面，所以 $\tan\theta=\frac{BC}{AB}$，当且仅当 C 位于平面 OAB 与球的交线上时，θ 取得最大值，此时 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\theta=30°$.故选 A.



13.$-\frac{1}{3}$ 【解析】由题意 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$，可知 $\tan\alpha=-2$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{-2+1}{1+2}=-\frac{1}{3}$.故答案为 $-\frac{1}{3}$.

14.$2\sqrt{2}$ 【解析】依题意 $2+\frac{p}{2}=\frac{5}{2}$，解得 $p=1$，所以 C：$y^2=2x$，$y_0^2=2\times2=4$，$|OP|=\sqrt{2^2+y_0^2}=2\sqrt{2}$.

15.2 【解析】设切点为 $A(m,n)$，由 $f(x)=x+\ln x$，得 $f'(x)=1+\frac{1}{x}$，则 $f'(m)=1+\frac{1}{m}=a$，因为点 A 为直线 $ax-y-1=0$ 与曲线 $y=x+\ln x$ 的公共点，则 $am-1=m+\ln m$，所以 $\begin{cases}a=1+\frac{1}{m},\\am-1=m+\ln m,\end{cases}$ 即 $\ln m=0$，可得 $m=1$，故 $a=1+1=2$.故答案为 2.

16.3 【解析】因为 $f(T)=f\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=\frac{1}{2}A+B=3$，$f\left(\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{\omega}\right)=-\frac{1}{2}A+B=1$，所以 $A=B=2$，从而 $f(x)=$

$2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+2$，因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，即 $\cos\left(\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=-1$，$\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\omega=4+12k\ (k\in\mathbf{Z})$，

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(4k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)+2=3.$

17.**解**：(1) 由题中数据可得，$\overline{x}=\frac{25}{5}=5$，$\overline{y}=\frac{25}{5}=5$，…………………………………… 2 分

则 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{(-3)\times(-2)+(-2)\times(-1.5)+0+2\times1.5+3\times3}{9+4+0+4+9}=\frac{21}{26}>0$，

∴ 变量 y 的值随着 x 的值增加而增加，

故 x 与 y 之间是正相关. …………………………………………………………………… 6 分

(2) 由已知得 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{21}{\sqrt{26}\times\sqrt{18.5}}=\frac{21}{\sqrt{481}}\approx\frac{21}{21.9}\approx0.96>0.8$，

故月份与接待游客人数之间有较强的线性相关程度. ……………………………………………… 12 分

18.(1)**证明**：因为 $2(S_n-n)=na_n$，$2[(S_{n-1}-(n-1)]=(n-1)a_{n-1}(n\geq2)$，

作差得 $(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}=-2$……①，

同理 $(n-1)a_{n+1}-na_n=-2$……②，…………………………………………………………… 2 分

②－①得 $a_n-a_{n-1}=a_{n+1}-a_n(n\geq2)$，

所以 $\{a_n\}$ 为等差数列. …………………………………………………………………… 5 分

(2)**解**：令 $n=1$，则 $2(S_1-1)=a_1$，解得 $a_1=2$，

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，故 $a_n=2+(n-1)d$，

所以 $a_1+a_3+\cdots+a_{13}=7\times2+2d(1+2+\cdots+6)=14+42d=98$，故 $d=2$，………………… 8 分

$S_n=\frac{2+2n}{2}\cdot n=n^2+n$，$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=1-\frac{1}{n+1}<1$. …………………………………………………… 12 分

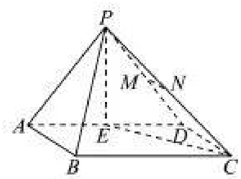
19.(1)**证明**：∵△PCD 中，M、N 分别是线段 PD，PC 的中点，∴$MN\parallel DC$.

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$DC\parallel AB$，……………………………………………………… 4 分

∴$MN\parallel AB$，又∵$MN\not\subset$平面 PAB，$AB\subset$平面 PAB，

∴$MN\parallel$平面 PAB. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)**解**：取 AD 边的中点 E，连接 PE，CE.



∵△PAD 是正三角形，∴$PE\perp AD$. ……………………………………………………………… 8 分

∵平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$PE\subset$平面 PAD，

$\therefore PE\perp$平面$ABCD$，

$\therefore\angle PCE$是直线PC与底面$ABCD$所成的角. ………………………………………………… 10分

设$AD=2a$，则$PE=\sqrt{3}a$，$CE=\sqrt{5}a$，

$\therefore$在$Rt\triangle PEC$中，$\tan\angle PCE=\dfrac{PE}{CE}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

即所求角的正切值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………………………………… 12分

20.**解**：(1)当$a=e$时，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-2x$，$f(1)=-\dfrac{3}{2}$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+x-2$，$f'(1)=0$，

所以切线方程为$y-\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0\times(x-1)$，

即$y=-\dfrac{3}{2}$. ………………………………………………………………………………………… 4分

(2)$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}+x-\dfrac{1+\ln a}{\ln a}=\dfrac{x^2\ln a-(1+\ln a)x+1}{x\ln a}=\dfrac{(x\ln a-1)(x-1)}{x\ln a}$，$x>0$，

令$f'(x)=0$，解得$x=1$或$x=\dfrac{1}{\ln a}$，………………………………………………………… 6分

①当$1<a<e$时，$\dfrac{1}{\ln a}>1$，

可知$f(x)$在$(0,1)$单调递增，在$\left(1,\dfrac{1}{\ln a}\right)$单调递减，在$\left(\dfrac{1}{\ln a},+\infty\right)$单调递增，

故$x=1$为$f(x)$的极大值点，不符合条件；……………………………………………………… 8分

②当$a=e$时，$f'(x)\geqslant 0$，无极值点；…………………………………………………………… 10分

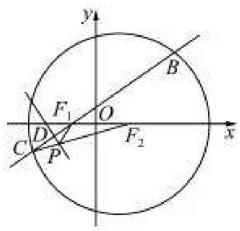
③当$a>e$时，$\dfrac{1}{\ln a}<1$，

可知$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{\ln a}\right)$单调递增，在$\left(\dfrac{1}{\ln a},1\right)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增，

故$x=1$为$f(x)$的极小值点，符合条件.

综上，a的取值范围为$(e,+\infty)$. ……………………………………………………………… 12分

21.**解**：(1)由题意得$F_1(-\sqrt{2},0)$，圆F_2：$(x-\sqrt{2})^2+y^2=32$的圆心为$F_2(\sqrt{2},0)$，半径为$R=4\sqrt{2}$.



因为D为F_1C中点，且$DP\perp BC$，所以PD是线段F_1C的垂直平分线，

所以$|PF_1|=|PC|$，……………………………………………………………………………………… 2分

所以$|PF_1|+|PF_2|=|PC|+|PF_2|=R=4\sqrt{2}>|F_1F_2|=2\sqrt{2}$，

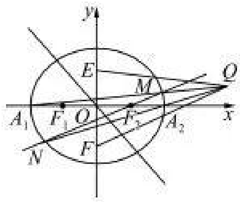
所以点 P 的轨迹即曲线 Γ 是以 F_1,F_2 为焦点的椭圆.

设曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>b>0,a^2-b^2=c^2$.

则 $2a=4\sqrt{2},a=2\sqrt{2},c=\sqrt{2},b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{6}$，

故曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)$\triangle QEF$ 的面积是定值，理由如下：



由题意易得 $A_1(-2\sqrt{2},0),A_2(2\sqrt{2},0)$，且直线 l_2 的斜率不为 0，

可设直线 $l_2:x=my+\sqrt{2},M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1,\\ x=my+\sqrt{2},\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2+6\sqrt{2}my-18=0,\Delta>0$ 恒成立，

所以 $y_1+y_2=-\frac{6\sqrt{2}m}{3m^2+4},y_1y_2=-\frac{18}{3m^2+4}$，则 $my_1y_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)$. ……………………………… 6 分

直线 A_1M 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2\sqrt{2}}(x+2\sqrt{2})$，

直线 A_2N 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2-2\sqrt{2}}(x-2\sqrt{2})$，

由 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2\sqrt{2}}(x+2\sqrt{2}),\\ y=\frac{y_2}{x_2-2\sqrt{2}}(x-2\sqrt{2}),\end{cases}$ 得 $\frac{x+2\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}}=\frac{(x_1+2\sqrt{2})y_2}{(x_2-2\sqrt{2})y_1}$. ……………………………………………… 8 分

所以 $\frac{x+2\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}}=\frac{(x_1+2\sqrt{2})y_2}{(x_2-2\sqrt{2})y_1}=\frac{(my_1+3\sqrt{2})y_2}{(my_2-\sqrt{2})y_1}=\frac{my_1y_2+3\sqrt{2}y_2}{my_1y_2-\sqrt{2}y_1}$

$=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)+3\sqrt{2}y_2}{\frac{3\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)-\sqrt{2}y_1}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{9\sqrt{2}}{2}y_2}{\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{3\sqrt{2}}{2}y_2}=3$，

解得 $x=4\sqrt{2}$. ………………………………………………………………………………………… 10 分

故点 Q 在直线 $x=4\sqrt{2}$ 上.

点 F_1,F_2 关于直线 $y=-x$ 的对称点分别为 E,F，设 $E(m,n)$，则有 $\begin{cases}k_{EF_1}=\frac{n-0}{m+\sqrt{2}}=1,\\ \frac{n+0}{2}=-\frac{m-\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=0,\\ n=\sqrt{2},\end{cases}$

所以 $E(0,\sqrt{2})$，同理可得 $F(0,-\sqrt{2})$，所以 Q 到 EF 的距离 $d=4\sqrt{2}$，

因此△QEF 的面积是定值，为 $\frac{1}{2}|EF|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=8$. ………………………………… 12 分

22.**解**：(1)由 $\rho=2\sqrt{5}\sin\theta$，得 $\rho^2=2\sqrt{5}\rho\sin\theta$，……………………………………………… 2 分

将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$ 代入，得圆 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2\sqrt{5}y=0$.

……………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)把参数方程 $\begin{cases}x=3+t,\\y=\sqrt{5}+t,\end{cases}$ 化为：$\begin{cases}x=3+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ ………………………………………… 6 分

代入 $x^2+y^2-2\sqrt{5}y=0$ 得 $t^2+3\sqrt{2}t+4=0$，$\Delta>0$. ………………………………… 8 分

设 t_1，t_2 是上述方程的两根，则有 $t_1+t_2=-3\sqrt{2}$，$t_1t_2=4>0$，

因此由 t 的几何意义可知 $|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|=3\sqrt{2}$. ……………………… 10 分

23.**解**：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=|x-4|+4$，由题意可知 $|x-4|+4<5$，即 $-1<x-4<1$，解得 $3<x<5$. …… 2 分

所以不等式 $f(x)<5$ 的解集为 $\{x|3<x<5\}$. ………………………………………………… 4 分

(2)当 $x\geqslant a^2$ 时，$f(x)=x-a^2+2a$，依题意，$x-a^2+2a\geqslant x+1$，即 $(a-1)^2\leqslant0$，所以 $a=1$. ……… 7 分

当 $x<a^2$ 时，$f(x)=a^2-x+2a$，依题意，$f(x)=a^2-x+2a\geqslant x+1$，解得 $x\leqslant\frac{a^2+2a-1}{2}$，显然此时原不等式的解集不为 **R**，$f(x)\geqslant x+1$ 不恒成立.

综上所述，$a=1$. ………………………………………………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。