

2024年1月“七省联考”考前猜想卷

数 学

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| C | B | A | A | B | C | C | D |

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

| | | | |
|----|-----|-----|----|
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| AC | ACD | ACD | AB |

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $f(x) = x$ (答案不唯一)

14. 3

15. $\frac{5}{32}$

16. 3π

四、解答题：本题共6小题，共70分。第17题10分，其他每题12分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【解析】(1) 点 $(\frac{1}{a_{n+1}}, \frac{1}{a_n})$ 在直线 $y = x + 2$ 上

得 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$, -----2分

所以数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是以首项为 $\frac{1}{a_1} = 1$ ，公差为 2 的等差数列。 -----3分

故 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + 2(n-1) = 2n-1$ ，即 $a_n = \frac{1}{2n-1}$ 。 -----5分

(2) $a_{n+1}a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$ -----6分

所以 $T_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \dots + \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$
 $= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}) < \frac{1}{2}$, -----8分

要使 $T_n < 3m - 12$ 对 $n \in N^*$ 恒成立，

$$3m - 12 \geq \frac{1}{2}, \text{ 即 } m \geq \frac{25}{3} \quad \text{-----9 分}$$

又 $m \in Z$, 所以 m 的最小值为 9. -----10 分

18.

【解析】(1) 因为 $c - 2b \cos A = b$,

由正弦定理得 $\sin C - 2 \sin B \cos A = \sin B$ -----2 分

又 $A + B + C = \pi$, 所以 $\sin(A + B) - 2 \sin B \cos A = \sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A - B) = \sin B$ -----3 分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $A - B \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

又 $y = \sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所以 $A - B = B$, 即 $A = 2B$; -----5 分

(2) 由 (1) 可知, $A = 2B$, 所以在 $\triangle ABD$ 中, $\angle ABC = \angle BAD$,

由正弦定理得: $\frac{AD}{\sin B} = \frac{AB}{\sin(\pi - 2B)} = \frac{2}{\sin 2B}$, 所以 $AD = BD = \frac{1}{\cos B}$, -----7 分

所以 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin B = \frac{\sin B}{\cos B} = \tan B$. -----9 分

又因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

所以 $0 < B < \frac{\pi}{2}$, $0 < 2B < \frac{\pi}{2}$, $0 < \pi - 3B < \frac{\pi}{2}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}$, -----11 分

所以 $\tan B \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, 即 $\triangle ABD$ 面积的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$. -----12 分

$$19. \text{ 【解析】(1) } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{1320}{\sqrt{10} \times \sqrt{176400}} = \frac{1320}{2 \times \sqrt{441000}} \approx 0.99 \quad \text{-----2 分}$$

分

(2) 因为 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3$, $\bar{y} = 590$,

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10, \quad \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1320, \quad \text{-----4 分}$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1320}{10} = 132, \quad \hat{a} = 590 - 132 \times 3 = 194, \quad \text{-----6 分}$$

所以变量 x , y 之间的线性回归方程为 $\hat{y} = 132x + 194$,

当 $x = 7$ 时, $\hat{y} = 132 \times 7 + 194 = 1118$ (万元).

所以预测 2023 年 7 月份该公司的直播带货金额为 1118 万元. -----8 分

(3) 补全完整的列联表如下.

| | 参加过直播带货 | 未参加过直播带货 | 总计 |
|----|---------|----------|----|
| 女性 | 25 | 5 | 30 |
| 男性 | 15 | 10 | 25 |
| 总计 | 40 | 15 | 55 |

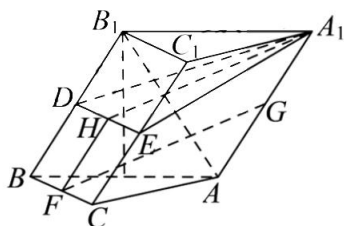
-----9分

零假设 H_0 : 参加直播带货与性别无关,

根据以上数据, 经计算得到 $K^2 = \frac{55 \times (25 \times 10 - 5 \times 15)^2}{30 \times 25 \times 40 \times 15} \approx 3.743 > 2.706 = \chi_{0.1}$, -----11分

根据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验我们推断 H_0 不成立, 即参加直播带货与性别有关, 该判断犯错误的概率不超过10%. -----12分

20. 【解析】(1) 如图所示:



当点 G 为 AA_1 的中点时, $FG \parallel$ 平面 A_1DE , -----1分

证明如下: 设 H 为 DE 中点, 连接 FH, A_1H .

因为在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \parallel CC_1 \parallel AA_1$, -----2分

D, E, F, G 分别为 BB_1, CC_1, BC, AA_1 的中点,

所以 $FH \parallel EC \parallel A_1G$, 且 $FH = EC = A_1G$,

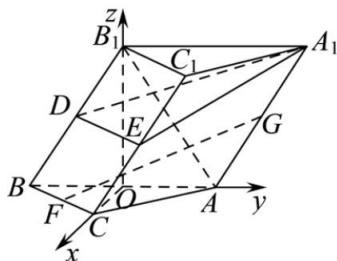
所以四边形 A_1GFH 为平行四边形.

所以 $FG \parallel A_1H$, -----4分

又因为 $A_1H \subset$ 平面 A_1DE , $FG \not\subset$ 平面 A_1DE ,

所以 $FG \parallel$ 平面 A_1DE . -----5 分

(2) 如图所示:



取 AB 中点 O , 连接 OB_1, AB_1, OC .

因为 $AB = AA_1 = BB_1$, $\angle ABB_1 = 60^\circ$,

所以 $\triangle ABB_1$ 为正三角形, 所以 $B_1O \perp AB$. -----6 分

又因为平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 ABC , 平面 $AA_1B_1B \cap$ 平面 $ABC = AB$, $B_1O \subset$ 平面 AA_1B_1B ,

所以 $B_1O \perp$ 平面 ABC ,

又 $CO, AO \subset$ 平面 ABC ,

所以 $B_1O \perp CO, B_1O \perp AO$,

因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 所以 $OC \perp AB$. -----7 分

以 O 为原点, 分别以 OC, OA, OB_1 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,

依题意得 $A(0, 3, 0), B(0, -3, 0), C(3\sqrt{3}, 0, 0), A_1(0, 6, 3\sqrt{3}), B_1(0, 0, 3\sqrt{3}), D\left(0, -\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, -----8 分

所以 $\overrightarrow{DA_1} = \left(0, \frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC} = (3\sqrt{3}, 3, 0)$.

设平面 A_1DE 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

则由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} \frac{15}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ 3\sqrt{3}x + 3y = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$, 得 $\vec{n} = (1, -\sqrt{3}, 5)$. -----9 分

取平面 ABC 的法向量 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,

设平面 A_1DE 与平面 ABC 所成二面角的大小为 θ ,

$$\text{则} |\cos \theta| = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{5}{1 \times \sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}. \quad \text{-----11分}$$

$$\text{所以} \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{29}}{29},$$

$$\text{所以平面 } A, DE \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成二面角的正弦值为 } \frac{2\sqrt{29}}{29}. \quad \text{-----12分}$$

21. 【解析】(1) 联立 $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x^2=2py \end{cases}$, 消 y 得 $x^2+2px+2p=0$,

因为直线 $x+y+1=0$ 与抛物线 $C: x^2=2py (p>0)$ 相切,

$$\text{所以} \Delta = 4p^2 - 8p = 0, \text{ 解得 } p=2 \text{ 或 } p=0 \text{ (舍去)}, \quad \text{-----2分}$$

$$\text{当 } p=2 \text{ 时, } x^2+4x+4=0, \text{ 解得 } x=-2, \text{ 所以 } y=1, \quad \text{-----4分}$$

$$\text{所以抛物线 } C \text{ 的方程为 } x^2=4y, \text{ 点 } A \text{ 的坐标为 } (-2,1); \quad \text{-----5分}$$

(2) 显然直线 l 的斜率存在,

$$\text{可设为 } y=kx+b, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y=kx+b \\ x^2=4y \end{cases}, \text{ 消 } y \text{ 得 } x^2-4kx-4b=0,$$

$$\text{则 } \Delta = 16k^2 + 16b > 0,$$

$$x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -4b, \quad \text{-----7分}$$

$$\overline{AM} = (x_1 + 2, y_1 - 1), \overline{AN} = (x_2 + 2, y_2 - 1),$$

因为以 MN 为直径的圆过点 A ,

$$\text{所以 } \overline{AM} \cdot \overline{AN} = 0,$$

$$\text{即 } (x_1 + 2)(x_2 + 2) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 0, \quad \text{-----8分}$$

$$\text{整理可得 } (k^2 + 1)x_1 x_2 + [k(b-1) + 2](x_1 + x_2) + (b-1)^2 + 4 = 0,$$

$$\text{所以 } -4b(k^2 + 1) + 4k^2(b-1) + 8k + (b-1)^2 + 4 = 0,$$

$$\text{化简得 } b^2 - 6b + 9 = 4k^2 - 8k + 4,$$

$$\text{所以 } (b-3)^2 = (2k-2)^2,$$

$$\text{所以 } b-3 = 2k-2 \text{ 或 } b-3 = 2-2k,$$

$$\text{即 } b = 2k+1 \text{ 或 } b = -2k+5, \quad \text{-----9分}$$

当 $b = 2k + 1$ 时, 直线 $l: y = kx + 2k + 1$,

即 $y - 1 = k(x + 2)$, 所以直线 l 过定点 $(-2, 1)$ (舍去), -----10 分

当 $b - 3 = 2 - 2k$ 时, 直线 $l: y = kx - 2k + 5$, 满足 $\Delta > 0$,

即 $y - 5 = k(x - 2)$, 所以直线 l 过定点 $Q(2, 5)$, -----11 分

当直线 l 与 AQ 垂直时, 点 A 到直线 l 的距离最大,

又 $k_{AQ} = \frac{5-1}{2-(-2)} = 1$, 所以 $k_l = -1$,

所以直线 l 的方程为 $x + y - 7 = 0$. -----12 分

22. 【解析】(1) 解: $f(x)$ 的定义域为 $(2, +\infty)$,

当 $a = 1$ 时, $f(x) = (x-1)\ln(x-2) - x + 3$,

$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x-1}{x-2} - 1 = \ln(x-2) + \frac{1}{x-2}$, -----2 分

设 $g(x) = \ln(x-2) + \frac{1}{x-2}$,

则 $g'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x-3}{(x-2)^2}$,

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 3$, -----4 分

当 $x \in (2, 3)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

所以, $g(x)_{\min} = g(3) = 1 > 0$, 则 $g(x) = f'(x) > 0$ 对任意的 $x > 2$ 恒成立,

所以, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2, +\infty)$, 无递减区间. -----6 分

(2) 解: 当 $x > 3$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立等价于 $\ln(x-2) - \frac{a(x-3)}{x-1} > 0$ 在 $(3, +\infty)$ 上恒成立,

设 $h(x) = \ln(x-2) - \frac{a(x-3)}{x-1} (x > 3)$, -----8 分

则 $h'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{2a}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2(a+1)x + 4a+1}{(x-2)(x-1)^2}$,

设 $\varphi(x) = x^2 - 2(a+1)x + 2a+1 (x > 3)$, -----9 分

则 $\varphi(x)$ 图象为开口向上, 对称轴为 $x = a+1$ 的抛物线的一部分,

当 $a \leq 2$ 时, $a+1 \leq 3$, $\varphi(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 单调递增, 且 $\varphi(3) = 4 - 2a \geq 0$, -----10 分

所以, $\varphi(x) \geq 0$, 即 $h'(x) \geq 0$, 则函数 $h(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $h(3) = 0$, 所以 $h(x) > 0$ 在 $(3, +\infty)$ 恒成立, 满足题意;

当 $a > 2$ 时, $a+1 > 3$, $\varphi(3) = 4 - 2a < 0$,

所以方程 $\varphi(x) = 0$ 有两相异实根, 设为 x_1 、 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 < 3 < x_2$,

当 $x \in (3, x_2)$ 时, $\varphi(x) < 0$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(3, x_2)$ 上单调递减,

又因为 $h(3) = 0$, 故当 $x \in (3, x_2)$ 时, $h(x) < h(3) = 0$, -----11 分

所以, $h(x) > 0$ 在 $(3, +\infty)$ 上不恒成立, 不满足题意.

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$. -----12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

