# 辽宁省实验中学 2023-2024 学年度高考适应性测试（一）

## 数学参考答案

**一、单选题（每题只有一个选项是正确答案，每题 5 分，共 40 分）**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | A | C | B | C | D | B | B |

**二、多选题（每题至少有一个选项为正确答案，少选且正确得 3 分，每题 5 分，共 20 分）**

| 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|
| AD | AC | ABD | BC |

**三、填空题（每题 5 分，共 20 分）**

13．$\sqrt{5}$　　14．540　　15．$-2\sin\frac{\theta}{2}$　　16．$\frac{3}{2}$

**四、解答题（17 题 10 分，其余每题 12 分，共 70 分）**

17.【详解】（1）取 $PD$ 的中点 $G$，连接 $AG$、$EG$，

根据中位线定理，$EG//CD$，且 $EG=\frac{1}{2}CD=AB$，

又 $AB//CD$，所以 $AB//EG$，$AB=EG$，则四边形 $ABEG$ 为平行四边形，$\therefore BE//AG$，

$\because BE\not\subset$ 平面 $PAD$，$AG\subset$ 平面 $PAD$，$\therefore BE//$ 平面 $PAD$；

（2）以 $D$ 为原点，$DA$、$DC$、过 $D$ 且垂直底面的直线分别为 $x$、$y$、$z$ 轴建立空间直角坐标系，

设 $AB=1$，则 $D(0,0,0)$、$A(1,0,0)$、$B(1,1,0)$、$C(0,2,0)$，设 $P(x,y,z)$，

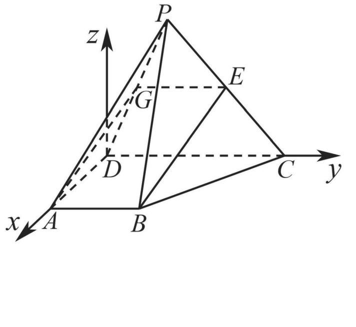
由 $|DP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2$，$|AP|=\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=2$，$|CP|=\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}=2$，

上面联立解方程组得 $x=\frac{1}{2}$，$y=1$，$z=\frac{\sqrt{11}}{2}$，

故点 $P\left(\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$，所以 $E\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$，得到 $\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$，

平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，由 $\cos\left\langle\vec{m},\overrightarrow{BE}\right\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}=\frac{\frac{\sqrt{11}}{4}}{1\times\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{66}}{12}$.

故直线 $BE$ 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{66}}{12}$.



18.【详解】(1)

解：由正弦定理得$\sin A\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin B\sin A$.

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin B$.

由$A+B+C=180°$，可得$\sin\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{B}{2}$，

所以$\cos\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$.

因为$\dfrac{B}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\cos\dfrac{B}{2}\neq 0$，所以$\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$，

所以$\dfrac{B}{2}=30^{\circ}$，$B=60°$

(2)

解：由于$B=60°$，$b=4$，有正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

所以$a=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\sin A$，$b=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\sin B$，

由于$C=\dfrac{2\pi}{3}-A$，

$C_{\triangle ABC}=a+b+c=4+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\sin A+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\sin C=4+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\sin A+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}A\right)$

$=4+4\cos A+4\sqrt{3}\sin A=8\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)+4$

因为$A\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，所以$\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$.

因此$C_{\triangle ABC}\in(8,12]$

19.【详解】解：(1) 双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的渐近线方程为$bx+ay=0$和$bx-ay=0$，

由动点$P(x_0,y_0)$到两条渐近线$l_1$，$l_2$的距离之积为$\dfrac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2|}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，

则$\dfrac{4b^2}{5}=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，

又$2c=2\sqrt{5}$，即$c^2=a^2+b^2=5$，

解得$a=2$，$b=1$，

则双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$.

(2) 证明：设直线$l$的方程为$y=kx+m$，

与双曲线的方程$x^2-4y^2=4$联立，可得$(4k^2-1)x^2+8kmx+4m^2+4=0$，

直线与双曲线的右支相切，可得$\Delta=(8km)^2-4(4k^2-1)(4m^2+4)=0$，可得$4k^2=m^2+1$，

设直线$l$与$x$轴交于$D$，则$D\left(-\frac{m}{k},0\right)$，

$S_{\triangle MON}=S_{\triangle MOD}+S_{\triangle NOD}=\frac{1}{2}|OD||y_M-y_N|=-\frac{m}{2k}|k|\cdot|x_M-x_N|$，

又双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{2}x$，

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x\\y=kx+m\end{cases}$，可得$M\left(\frac{2m}{1-2k},\frac{m}{1-2k}\right)$，

同理可得$N\left(-\frac{2m}{1+2k},\frac{m}{1+2k}\right)$，

则$S_{\triangle MON}=\frac{-m}{2k}\cdot|k|\cdot\left|\frac{2m}{1+2k}+\frac{2m}{1-2k}\right|=\frac{-m}{2k}\cdot|k|\cdot\left|\frac{4m}{1-4k^2}\right|=\frac{2m^2}{m^2}=2$.

即有$\triangle MON$面积为定值2.

20.【详解】(1) 解：在等腰梯形$ADEF$中，作$EM\perp AD$于$M$，

则$DM=\frac{AD-EF}{2}=1,AM=3,EM=\sqrt{3}$，所以$AE=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$，

连接$AC$，则$AC=4\sqrt{2}$，

因为$\angle AEC=90^{\circ}$，所以$EC=2\sqrt{5}$，所以$ED^2+DC^2=EC^2$，所以$CD\perp ED$，

又因为$CD\perp AD$，且$AD\cap ED=D$，$AD,ED\subset$平面$ADEF$，所以$CD\perp$平面$ADEF$，

又由$AE\subset$平面$ADEF$，所以$CD\perp AE$，

因为$CE\perp AE$且$CE\cap CD=C$，$CE,CD\subset$平面$CDE$，所以$AE\perp$平面$CDE$，

又因为$AE\subset$平面$CDE$，所以$AE\perp DE$，

因为$AE\perp CE$，所以$\angle CED$就是二面角$C-AE-D$的平面角，

在直角$\triangle CDE$中，$\cos\angle CDE=\frac{DE}{CE}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以二面角$C-AE-D$的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2) 解：取$AD$的中点$O_1$，连接$O_1E,O_1F$，可得证四边形$O_1DEF$、$O_1AFE$均为平行四边形，

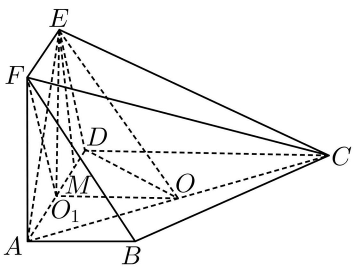
所以$O_1D=O_1A=O_1E=O_1F=2$，所以$O_1$为等腰梯形$ADEF$的外心，

取$AC$的中点$O$，连接$OA,OD,OE,OO_1$，可得$OO_1//CD$，

因为$CD\perp$平面$ADEF$，所以$O_1O\perp$平面$ADEF$，

又因为$OC=OA=OD=OE=OF=2\sqrt{2}$，所以$O$为四棱锥$C-ADEF$外接球的球心，

所以球的半径为$R=2\sqrt{2}$，所以$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times(2\sqrt{2})^3=\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$.




21．【详解】（1）令 $\dfrac{3x-1}{3x+1}>0$，即 $(3x-1)(3x+1)>0$，

解得 $x>\dfrac{1}{3}$ 或 $x<-\dfrac{1}{3}$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，

而 $f(-x)=\log_2\dfrac{-3x-1}{-3x+1}=\log_2\dfrac{3x+1}{3x-1}$

$=\log_2\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{-1}=-\log_2\dfrac{3x-1}{3x+1}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

（2）令 $t=\dfrac{3x-1}{3x+1}$，则 $y=\log_2 t$，

又 $t=\dfrac{3x-1}{3x+1}=\dfrac{-2}{3x+1}+1$，

设 $x_1,x_2\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，且 $x_1<x_2$，

则 $t_1-t_2=\dfrac{-2}{3x_1+1}+1-\left(\dfrac{-2}{3x_2+1}+1\right)$

$=\dfrac{6(x_1-x_2)}{(3x_1+1)(3x_2+1)}$

因为 $x_1,x_2\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，且 $x_1<x_2$，

所以 $3x_1+1>0,3x_2+1>0$，$x_1-x_2<0$，

因此 $t_1<t_2$，即 $t=\dfrac{3x-1}{3x+1}$ 在 $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，

又因为 $y=\log_2 t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)=\log_2\dfrac{3x-1}{3x+1}$ 在 $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ 上单调递增.

22．【详解】（1）解：因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1=1$，$a_3=4\sqrt{2}+1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d=\dfrac{a_3-a_1}{2}=2\sqrt{2}$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2\sqrt{2}(n-1)+1$，

则 $S_n=n+\dfrac{n(n-1)2\sqrt{2}}{2}$，又 $b_n=\dfrac{S_n}{n}=\sqrt{2}(n-1)+1$，

$\therefore b_{n+1}-b_n=\sqrt{2}n-1-\left[\sqrt{2}(n-1)-1\right]=\sqrt{2}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，故数列 $\{b_n\}$ 为等差数列.

（2）证明：假设数列$\{a_n\}$中存在不同三项构成等比数列，

不妨设$a_m$、$a_n$、$a_p$（$m$、$n$、$p$均不相等）成等比数列，即$a_n^2=a_m\cdot a_p$，

由数列$\{a_n\}$的通项公式可得$\left[\sqrt{2}(n-1)+1\right]^2=\left[\sqrt{2}(m-1)+1\right]\cdot\left[\sqrt{2}(p-1)+1\right]$，

将此式展开可得$2\sqrt{2}(n-1)+2(n-1)^2+1=\sqrt{2}(m+p-2)+2(m-1)(p-1)+1$，

所以有$\begin{cases}2(n-1)=m+p-2\\2(n-1)^2+1=2(m-1)(p-1)+1\end{cases}$，即$\begin{cases}2n=m+p\\(n-1)^2=(m-1)(p-1)\end{cases}$，

所以，$n^2-2n+1=mp-(m+p)+1$，所以，$mp=n^2=\left(\dfrac{m+p}{2}\right)^2$，

化简整理得$(m-p)^2=0$，$\therefore m=p$，与假设矛盾，

故数列$\{a_n\}$中任意三项均不能构成等比数列.

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。