

2023 年“三新”协同教研共同体高三联考 数学试卷

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = iz_1$, 则 $z_1 + z_2$ 的实部为

- A. -1 B. 5 C. 1 D. -5

2. 抛物线 $y^2 = \frac{1}{3}x$ 的准线方程为

- A. $y = -\frac{1}{12}$ B. $x = -\frac{1}{6}$ C. $x = -\frac{1}{12}$ D. $y = -\frac{1}{6}$

3. 若奇函数 $f(x) = \begin{cases} g(x) + 1, & x < 0, \\ x^2 + \lg x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $g(-10) =$

- A. -102 B. 102 C. -101 D. 101

4. 现有一个圆台形的杯子,杯口的内径为 8 cm,杯底的内径与杯中盛满溶液时的液面高度均为 10 cm,当杯中盛满溶液,且该溶液的密度 $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ 时,杯中溶液的质量为

- A. $\frac{2440\pi}{3} \text{ g}$ B. $\frac{800\pi}{3} \text{ g}$ C. $\frac{610\pi}{3} \text{ g}$ D. $\frac{650\pi}{3} \text{ g}$

5. 现有 6 个不同的生肖吉祥物,分 1 个给老师,其他 5 个分给 3 位学生,每位学生至少分到 1 个,则这 6 个生肖吉祥物的分配方法共有

- A. 360 种 B. 900 种 C. 720 种 D. 1800 种

6. 已知向量 a, b 满足 $|a + b| = 2$, $|a - b| = |2a + b|$, 则 $|a|$ 的最大值为

- A. $2\sqrt{3}$ B. 2 C. $3\sqrt{2}$ D. 4

7. 已知函数 $f(x) = 4\sin x \cos x$, $g(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 则

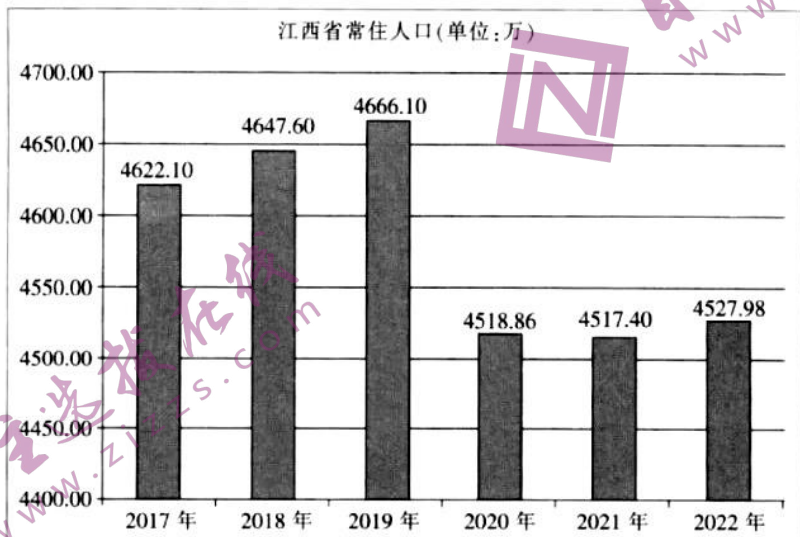
- A. 当 $f(x)$ 取得最大值时, $g(x)$ 取得最小值
B. 当 $g(x)$ 取得最大值时, $f(x) = -1$
C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称
D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称

8. 已知函数 $f(x) = x^3(\ln x)^2 - m(x^2 + x)\ln x + m^2$ 恰有 4 个零点, 则 m 的取值范围是

- A. $(-\frac{1}{e}, 0)$ B. $(-\frac{1}{2e}, 0)$ C. $(-\frac{1}{e}, -\frac{1}{2e})$ D. $(-\frac{1}{2e}, +\infty)$

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 江西省 2017 年到 2022 年常住人口变化图如图所示, 则



- A. 江西省 2017 年到 2022 年这 6 年的常住人口在 2019 年取得最大值
 B. 江西省 2017 年到 2022 年这 6 年的常住人口的极差为 148.70 万
 C. 江西省 2017 年到 2022 年这 6 年的常住人口的中位数为 4527.98 万
 D. 江西省 2017 年到 2022 年这 6 年的常住人口的第 80 百分位数为 4647.60 万

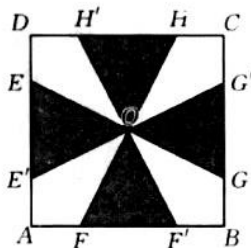
10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_4 + a_8 = 15$, 下列结论正确的是

- A. a_5 是定值 B. $\{a_n\}$ 的前 9 项和为 54
 C. $a_2 a_8$ 的最大值为 25 D. 若 $a_2 a_8 > 0$, 则 $\frac{1}{a_2} + \frac{4}{a_8}$ 的最小值为 $\frac{9}{10}$

11. 已知曲线 $C: y = \sqrt{1 - (|x| - 1)^2}$, 斜率为 k 的直线 l 经过点 $A(3, 3)$, 下列结论正确的是

- A. C 的周长为 π
 B. 若 l 与 C 恰有 3 个公共点, 则 k 的取值范围为 $(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}, 1)$
 C. 若 l 与 C 恰有 2 个公共点, 则 k 的取值范围为 $(\frac{12-2\sqrt{6}}{15}, \frac{3}{5}] \cup \{1, \frac{6-2\sqrt{3}}{3}\}$
 D. 若 l 与 C 恰有 1 个公共点, 则 k 的取值范围为 $(\frac{3}{5}, \frac{6-2\sqrt{3}}{3}) \cup (1, 3) \cup \{\frac{12-2\sqrt{6}}{15}\}$

12. 如图, 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中剪掉四个阴影部分的等腰三角形, 其中 O 为正方形对角线的交点, $OE = OE' = OF = OF' = OG = OG' = OH = OH'$, 将其余部分折叠围成一个封闭的正四棱锥, 若该正四棱锥的内切球半径为 $\frac{1}{2}$, 则该正四棱锥的表面积可能为



- A. 12 B. $4 + 4\sqrt{5}$
 C. 8 D. $5 + 2\sqrt{5}$

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 24 \leq 0\}$, $B = \{x | m^2 < x < m^2 + 2\}$, $A \cap B = \emptyset$, 则 m^2 的最小值为 .

14. 若随机变量 $X \sim B(100, p)$ ($0 < p < \frac{1}{2}$), 且 $D(X) = 16$, 则 $E(X) =$.

15. 请写出一个同时满足下列两个条件的函数: $f(x) =$.

① $f(x) \cdot f(-x) = -x^2$; ② 函数 $y = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

16. 已知双曲线 C 的两个焦点为 F_1, F_2 , P 为 C 上一点, $|PF_1| = |F_1F_2|$, $\angle PF_1F_2 = 36^\circ$, 则 C 的离心率为 .

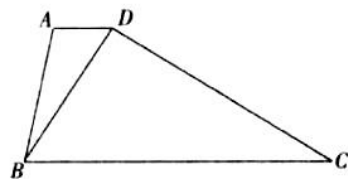
四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BD = 5$, $\angle CBD = 60^\circ$.

(1) 若 $\sin \angle BCD = \frac{1}{4}$, 求 CD 的长;

(2) 若 $AD = 2$, 求 $\cos \angle ABD$.

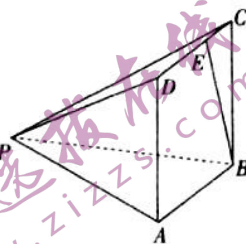


18. (12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形, $AB = 3$, $PD = 4$, $PC = 5$.

(1) 证明:平面 $PCD \perp$ 平面 PAD .

(2) 若 $AD \perp PA$, $\vec{DE} = 2\vec{EC}$, 求直线 BE 与平面 PCD 所成角的正弦值.



19. (12 分)

已知某地居民中青少年、中年人、老年人的人数比例为 $3:4:3$. 假设该地居民选择寒假旅游地相互独立,且他们寒假去江西庐山、三清山旅游的概率如下表所示:

	青少年	中年人	老年人
只去庐山旅游	0.1	0.3	0.2
只去三清山旅游	0.2	0.2	0.3
庐山、三清山都去旅游	0.05	0.1	0.1

(1) 若从该地居民(仅指青少年、中年人、老年人)中任选一人,求此人寒假去庐山旅游的概率;

(2) 若甲、乙分别是该地居民中的一位中年人、老年人,记这两人中寒假去三清山旅游的人数为 X , 求 X 的分布列.

20. (12分)

已知点 $A_1(1,2), A_2(2,3)$, 设 $A_n(a_n, b_n) (n \in \mathbf{N}^*)$, 当 $n \geq 3$ 时, 线段 $A_{n-2}A_{n-1}$ 的中点为 B_n , B_n 关于直线 $y=x$ 的对称点为 A_n . 例如, B_3 为线段 A_1A_2 的中点, 则 $B_3(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), A_3(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.

(1) 设 $c_n = a_{n+1} + b_{n+1} - a_n - b_n$, 证明: $\{c_n\}$ 是等比数列.

(2) 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的通项公式.

21. (12分)

过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 E , 且该垂线与抛物线 $x^2 = -4y$ 交于点 F , $|PE|^2 + |EF| = 1$. 记动点 P 的轨迹为曲线 C .

(1) 试问 C 为何种圆锥曲线? 说明你的理由.

(2) 圆 Q 是以点 $Q(1,0)$ 为圆心, $r(0 < r < 1)$ 为半径的圆, 过点 $B(0, -1)$ 作圆 Q 的两条切线, 这两条切线分别与 C 相交于点 M, N (异于点 B). 当 r 变化时, 是否存在定点 G , 使得直线 MN 恒过点 G ? 若存在, 求 G 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = (1+x)^m - mx - 1, x \in (-1, +\infty), m > 0$ 且 $m \neq 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi), a \sin x < (1 + \cos^2 x)^{\sin x}$, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ 时, $\frac{(1 - \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt[3]{\sin x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\sin x})}{(1 - \sin x)^{n-1}} > \frac{1}{n!}$ 恒成立.

2023 年“三新”协同教研共同体高三联考 数学试卷参考答案

1. B 【解析】本题考查复数的运算与复数的实部,考查数学运算的核心素养.

因为 $z_2 = 3 + 2i$, 所以 $z_1 + z_2 = 5 - i$, 所以 $z_1 + z_2$ 的实部为 5.

2. C 【解析】本题考查抛物线的准线方程,考查数学运算的核心素养.

因为 $2p = \frac{1}{3}$, 所以 $p = \frac{1}{6}$, 所以抛物线 $y^2 = \frac{1}{3}x$ 的准线方程为 $x = -\frac{1}{12}$.

3. A 【解析】本题考查函数的奇偶性与函数求值,考查数学运算的核心素养.

因为 $g(-10) + 1 = f(-10) = -f(10) = -(100 + 1) = -101$, 所以 $g(-10) = -102$.

4. C 【解析】本题考查圆台体积的实际应用,考查直观想象与数学运算的核心素养.

当杯中盛满溶液时,溶液的体积 $V = \frac{\pi}{3} \times 10 \times (4^2 + 4 \times 5 + 5^2) = \frac{610\pi}{3} \text{ cm}^3$, 此时杯中溶液的质量 $m = \rho V = \frac{610\pi}{3} \text{ g}$.

5. B 【解析】本题考查排列组合的实际应用,考查应用意识.

分三步,先分 1 个给老师,共有 C_6^1 种分法,再把剩余的 5 个分成 3 组,共有 $\frac{C_5^3 C_2^1 + C_5^2 C_3^1}{A_2^2}$ 种分组方法,最后将分好组的吉祥物分给 3 位学生,共有 A_3^3 种分法,故这 6 个生肖吉祥物的分配方法共有 $C_6^1 \cdot \frac{C_5^3 C_2^1 + C_5^2 C_3^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 900$ 种.

6. D 【解析】本题考查平面向量的数量积与模,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

因为 $|a - b| = |2a + b|$, 所以 $|a - b|^2 = |2a + b|^2$, 即 $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 4a^2 + 4a \cdot b + b^2$, 整理得 $a^2 + 2a \cdot b = 0$. 又 $|a + b| = 2$, 所以 $|a + b|^2 = 4$, 即 $a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 4$, 所以 $b^2 = |b|^2 = 4$, 即 $|b| = 2$. 又 $|a + b| = 2$, 所以当 a 与 b 反向时, $|a|$ 取得最大值,且最大值为 $2 + 2 = 4$.

7. D 【解析】本题考查三角恒等变换与三角函数的图象及其性质,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

$f(x) = 2\sin 2x$, $g(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$. 当 $f(x)$ 取得最大值时, $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $g(x) = 1$, A 错误.

当 $g(x)$ 取得最大值时, $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $f(x) = 1$, B 错误.

因为 $f(\frac{2\pi}{3} - x) = 2\sin(\frac{4\pi}{3} - 2x) = 2\sin[\pi - (2x - \frac{\pi}{3})] = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = g(x)$, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, C 错误, D 正确.

8. B 【解析】本题考查函数的零点与导数的应用,考查直观想象与逻辑推理的核心素养以及化归与转化的数学思想.

令 $f(x) = (x \ln x - m)(x^2 \ln x - m) = 0$, 得 $x \ln x = m$ 或 $x^2 \ln x = m$.

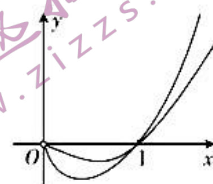
设函数 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = 1 + \ln x$. 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow 0$.

设函数 $h(x) = x^2 \ln x$, 则 $h'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$. 当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$ 时,

$h'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$. 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$h(x) \rightarrow 0$.



作出 $g(x) = x \ln x$ 与 $h(x) = x^2 \ln x$ 的大致图象, 如图所示. 由图可知, 当 $-\frac{1}{2e} < m < 0$ 时, 直线 $y = m$ 与这两个函数的图象各有两个交点, 且这些交点各不相同, 此时 $f(x)$ 恰有 4 个零点.

9. ABD 【解析】本题考查统计的图表、极差、中位数、百分位数, 考查数据处理能力.

由图可知, A 正确. 将江西省 2017 年到 2022 年这 6 年的常住人口(单位: 万)按照从小到大的顺序排列为 4517.40, 4518.86, 4527.98, 4622.10, 4647.60, 4666.10, 则极差为 $4666.10 - 4517.40 = 148.70$ 万, 中位数为 $\frac{4527.98 + 4622.10}{2} = 4575.04$ 万, B 正确, C 错误. 因为 $6 \times 0.8 = 4.8$, 所以第 80 百分位数为 4647.60 万, D 正确.

10. ACD 【解析】本题考查等差数列的性质与基本不等式, 考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为 $a_3 + a_1 + a_8 = 3a_5 = 15$, 所以 $a_5 = 5$, 则 $\{a_n\}$ 的前 9 项和为 $9a_5 = 45$, A 正确, B 错误. 因为 $\forall x, y \in \mathbf{R}, xy \leq (\frac{x+y}{2})^2$, 所以 $a_2 a_8 \leq (\frac{a_2 + a_8}{2})^2 = (a_5)^2 = 25$, 当且仅当 $a_2 = a_8 = 5$ 时, 等号成立, C 正确.

因为 $a_2 + a_8 = 2a_5 = 10, a_2 a_8 > 0$, 所以 $a_2 > 0, a_8 > 0$, 所以 $\frac{1}{10}(\frac{1}{a_2} + \frac{4}{a_8})(a_2 + a_8) = \frac{1}{10}(5 + \frac{a_8}{a_2} + \frac{4a_2}{a_8}) \geq \frac{1}{10}(5 + 4) = \frac{9}{10}$, 当且仅当 $\frac{a_8}{a_2} = \frac{4a_2}{a_8}$, 即 $a_8 = 2a_2 = \frac{20}{3}$ 时, 等号成立, D 正确.

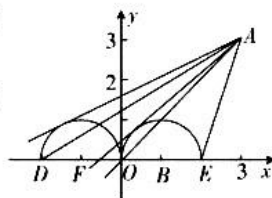
11. BC 【解析】本题考查直线与圆的位置关系, 考查直观想象与数学运算的核心素养.

由 $y = \sqrt{1 - (|x| - 1)^2}$, 得 $(|x| - 1)^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$, 则曲线 C 表示两个关于 y 轴对称的半圆弧(半径为 1), 且左半圆的圆心为 $F(-1, 0)$, 右半圆的圆心为 $B(1, 0)$, 曲线 C 与 x 轴的交点为 $D(-2, 0), O(0, 0), E(2, 0)$.

故曲线 C 的周长为 2π , A 错误. 若直线 $l: y = k(x - 3) + 3$ 与左半圆相

切, 则 $\frac{|-4k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$, 解得 $k = \frac{12 \pm 2\sqrt{6}}{15}$, 由图可知 $k = \frac{12 - 2\sqrt{6}}{15}$. 若直

线 $l: y = k(x - 3) + 3$ 与右半圆相切, 则 $\frac{|-2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$, 解得 $k =$



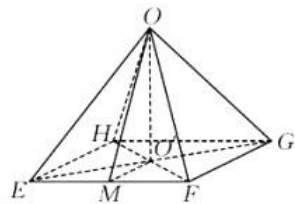
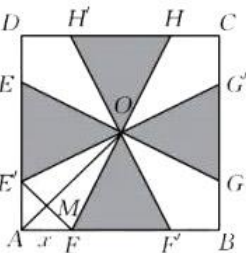
$\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$, 由图可知 $k = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}$. 若直线 $l: y = k(x - 3) + 3$ 经过点 D , 则 $k = \frac{3}{5}$. 若直线 $l: y = k(x - 3) + 3$ 经过点 O , 则 $k = 1$. 若直线 $l: y = k(x - 3) + 3$ 经过点 E , 则 $k = 3$. 若 l 与 C 恰有 1 个公共点, 则 k 的取值范围为 $(\frac{3}{5}, \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}) \cup (1, 3] \cup \{\frac{12 - 2\sqrt{6}}{15}\}$, D 错误. 若 l 与 C 恰有 2 个公共点, 则 k 的取值范围为 $(\frac{12 - 2\sqrt{6}}{15}, \frac{3}{5}] \cup \{1, \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}\}$, C 正确. 若 l 与 C 恰有 3 个公共点, 则 k 的取值范围为 $(\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}, 1)$, B 正确.

12. BC 【解析】本题考查立体几何中的翻折问题与四棱锥的内切球, 考查空间想象能力与运算求解能力.

设翻折前 $AE' = x (0 < x < 2)$, 则翻折后

$EF = \sqrt{2}x$, 斜高 $OM = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x$,

该四棱锥的高 $OO' = \sqrt{OM^2 - O'M^2} = \sqrt{8 - 4x}$,



则 $V_{O-EFGH} = \frac{1}{3}OO' \cdot S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{3} \times \sqrt{8 - 4x} \times 2x^2 = \frac{4x^2}{3}\sqrt{2 - x}$.

该四棱锥的表面积 $S = S_{\text{正方形}ABCD} - 4S_{\triangle OEF} = 16 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times (4 - 2x) = 8x$.

因为该正四棱锥的内切球半径为 $\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{3V_{O-EFGH}}{S} = \frac{1}{2}$, 即 $x \cdot \sqrt{2 - x} = 1$,

则 $x^3 - 2x^2 + 1 = (x - 1)(x^2 - x - 1) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (负根舍去),

故 $S = 8$ 或 $4 + 4\sqrt{5}$.

13. 6 【解析】本题考查集合的交集与一元二次不等式的解法, 考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为 $A = \{x | -4 \leq x \leq 6\}$, $m^2 \geq 0$, 所以 $m^2 \geq 6$, 所以 m^2 的最小值为 6.

14. 20 【解析】本题考查二项分布的期望与方差, 考查数学运算的核心素养.

因为 $X \sim B(100, p)$, 所以 $D(X) = 100p(1 - p) = 16$, 解得 $p = \frac{1}{5}$ 或 $\frac{4}{5}$, 因为 $0 < p < \frac{1}{2}$, 所以

$p = \frac{1}{5}$, 所以 $E(X) = 100p = 20$.

15. xe^x (答案不唯一, 形如 $xa^x (a \geq 1)$ 均可) 【解析】本题以开放题的形式考查函数的解析式与性质, 考查逻辑推理与数学抽象的核心素养.

因为 $a^x \cdot a^{-x} = 1$, $f(x) \cdot f(-x) = -x^2$, 所以可设 $f(x) = xa^x$, 则 $y = \frac{f(x)}{x} = a^x$. 因为函数

$y = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $a > 1$, 所以 $f(x) = xa^x (a > 1)$ 满足这两个条件.

16. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 【解析】本题考查双曲线的离心率,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

如图,在线段 F_1F_2 上取一点 A ,使得 $|PA|=|PF_2|$. 因为 $|PF_1|=|F_1F_2|$, $\angle PF_1F_2=36^\circ$, 所以 $\angle PF_2F_1=\angle F_1PF_2=\angle PAF_2=72^\circ$, 所以 $\angle APF_1=72^\circ-36^\circ=36^\circ$, 所以 $|PA|=|AF_1|=|PF_2|$.

易知 $\triangle F_1PF_2$ 与 $\triangle PAF_2$ 相似, 则 $\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{|AF_2|}{|AP|}=\frac{|AF_2|}{|PF_2|}$.

$\frac{|PF_1|-|PF_2|}{|PF_2|}$. 设 $|PF_1|=x$, $|PF_2|=y$, 则有 $\frac{y}{x}=\frac{x-y}{y}$, 则 $\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}-1=0$, 解得 $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(负根舍去), 所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|-|PF_2|}=\frac{|PF_1|}{|PF_1|-|PF_2|}=\frac{x}{x-y}=\frac{x}{y-1}$

$$\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{x}{y-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2-1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

17. 解:(1)在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin \angle BCD}=\frac{CD}{\sin \angle CBD}$, 2分

则 $CD=\frac{BD \sin \angle CBD}{\sin \angle BCD}=\frac{5 \sin 60^\circ}{\frac{1}{4}}=10\sqrt{3}$ 4分

(2)因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle ADB=\angle CBD=60^\circ$ 5分

由余弦定理得 $AB^2=BD^2+AD^2-2BD \cdot AD \cdot \cos \angle ADB=19$, 7分

则 $AB=\sqrt{19}$, 8分

所以 $\cos \angle ABD=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB \cdot BD}=\frac{4\sqrt{19}}{19}$ 10分

18. (1)证明:在正方形 $ABCD$ 中, $CD=AB=3$.

因为 $CD^2+PD^2=PC^2$, 所以 $CD \perp PD$ 1分

在正方形 $ABCD$ 中, $CD \perp AD$ 2分

因为 $PD \cap AD=D$, 所以 $CD \perp$ 平面 PAD 3分

又 $CD \subset$ 平面 PCD , 所以平面 $PCD \perp$ 平面 PAD 4分

(2)解:由(1)知 $CD \perp$ 平面 PAD , 则 $CD \perp PA$, 则 $AB \perp PA$ 5分

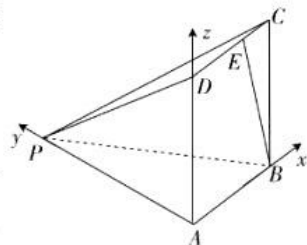
因为 $AD \perp PA$, $AD \perp AB$, $AB \cap PA=A$, 所以 $AD \perp$ 平面 PAB 6分

以 A 为坐标原点, \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AD} 的方向分别为 x , y , z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $P(0, \sqrt{7}, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $E(2, 0, 3)$, $C(3, 0, 3)$, $D(0, 0, 3)$ 7分

设平面 PCD 的法向量为 $m=(x, y, z)$, $\overrightarrow{DC}=(3, 0, 0)$, $\overrightarrow{PD}=(0,$

$-\sqrt{7}, 3)$, 8分



则 $\begin{cases} m \cdot \vec{DC} = 3x = 0, \\ m \cdot \vec{PD} = -\sqrt{7}y + 3z = 0, \end{cases}$ 9分

令 $z = \sqrt{7}$, 得 $m = (0, 3, \sqrt{7})$ 10分

因为 $\vec{BE} = (-1, 0, 3)$, 所以 $\cos \langle m, \vec{BE} \rangle = \frac{m \cdot \vec{BE}}{|m| |\vec{BE}|} = \frac{3\sqrt{7}}{4 \times \sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{70}}{40}$ 11分

所以直线 BE 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{70}}{40}$ 12分

19. 解: (1) 由表可知该地居民中青少年寒假去庐山旅游的概率为 $0.1 + 0.05 = 0.15$, 1分

该地居民中中年人寒假去庐山旅游的概率为 $0.3 + 0.1 = 0.4$, 2分

该地居民中老年人寒假去庐山旅游的概率为 $0.2 + 0.1 = 0.3$, 3分

所以根据全概率公式可得, 此人寒假去庐山旅游的概率为 $0.15 \times \frac{3}{3+4+3} + 0.4 \times \frac{4}{3+4+3} + 0.3 \times \frac{3}{3+4+3} = 0.295$ 6分

(2) 由表可知该地居民中青年人、老年人寒假去三清山旅游的概率分别为 $0.2 + 0.1, 0.3 + 0.1$, 即 $0.3, 0.4$ 8分

X 的可能取值为 $0, 1, 2$,

$P(X=0) = (1-0.3) \times (1-0.4) = 0.42$, 9分

$P(X=1) = 0.3 \times (1-0.4) + 0.4 \times (1-0.3) = 0.46$, 10分

$P(X=2) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$, 11分

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.42	0.46	0.12

..... 12分

【注】第(1)问中, 得到所求概率为 $0.15 \times \frac{3}{3+4+3} + 0.4 \times \frac{4}{3+4+3} + 0.3 \times \frac{3}{3+4+3}$, 但最后的结果计算错误, 扣1分.

20. (1) 证明: 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, 线段 $A_n A_{n+1}$ 的中点为 $B_{n+2}, B_{n+2}(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \frac{b_n + b_{n+1}}{2})$,

则 $A_{n+2}(\frac{b_n + b_{n+1}}{2}, \frac{a_n + a_{n+1}}{2})$ 1分

由 $\begin{cases} a_{n+2} = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}, \\ b_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \end{cases}$ 2分

得 $a_{n+2} + b_{n+2} = \frac{a_n + b_n + a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$, 3分

所以 $a_{n+2} + b_{n+2} - a_{n+1} - b_{n+1} = -\frac{a_{n+1} + b_{n+1} - a_n - b_n}{2}$, 即 $c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n$ 4分

因为 $c_1 = a_2 + b_2 - a_1 - b_1 = 2$, 所以 $\{c_n\}$ 是以 2 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. 5 分

(2) 解: 由(1)知 $c_n = 2 \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$, 6 分

即 $a_{n+1} + b_{n+1} - a_n - b_n = 2 \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$,

则 $a_2 + b_2 - a_1 - b_1 = 2 \times (-\frac{1}{2})^0, a_3 + b_3 - a_2 - b_2 = 2 \times (-\frac{1}{2})^1, \dots, a_n + b_n - a_{n-1} - b_{n-1} = 2 \times (-\frac{1}{2})^{n-2} (n \geq 2)$, 8 分

将以上各式相加得 $a_n + b_n - (a_1 + b_1) = 2 [(-\frac{1}{2})^0 + (-\frac{1}{2})^1 + \dots + (-\frac{1}{2})^{n-2}] = 2 \times \frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$ 10 分

因为 $a_1 + b_1 = 3$, 所以 $a_n + b_n = \frac{13}{3} - \frac{4}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$ 11 分

当 $n=1$ 时, $a_1 + b_1 = 3$ 也符合上式, 故 $a_n + b_n = \frac{13}{3} - \frac{4}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$ 12 分

21. 解: (1) 设 $P(x, y)$, 则 $E(x, 0), F(x, -\frac{x^2}{4})$, 1 分

则 $|PE| = |y|, |EF| = |-\frac{x^2}{4}| = \frac{x^2}{4}$ 2 分

因为 $|PE|^2 + |EF|^2 = 1$, 所以 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

所以 C 为椭圆. 3 分

(2) 由题可知切线的斜率存在, 设切线方程为 $y = kx - 1$, 圆 $Q: (x-1)^2 + y^2 = r^2 (0 < r < 1)$,

则 $\frac{|k-1|}{\sqrt{1+k^2}} = r$,

整理得 $(1-r^2)k^2 - 2k + 1 - r^2 = 0$ 4 分

设切线 BM, BN 的斜率分别为 $k_1, k_2 (k_1 \neq k_2)$, 则 k_1, k_2 是上述方程的两根, 由韦达定理得 $k_1 k_2 = 1$ 5 分

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = k_1 x - 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(1+4k_1^2)x^2 - 8k_1 x = 0$ 6 分

因为 $x_1 \neq 0$, 所以 $x_1 = \frac{8k_1}{1+4k_1^2}, y_1 = \frac{4k_1^2 - 1}{1+4k_1^2}$ 7 分

同理可得 $x_2 = \frac{8k_2}{1+4k_2^2}, y_2 = \frac{4k_2^2 - 1}{1+4k_2^2}$. 因为 $k_1 k_2 = 1$, 所以 $x_2 = \frac{8k_1}{k_1^2 + 4}, y_2 = \frac{4 - k_1^2}{k_1^2 + 4}$, 8 分

所以 $k_{MN} = \frac{\frac{4 - k_1^2}{k_1^2 + 4} - \frac{4k_1^2 - 1}{1+4k_1^2}}{\frac{8k_1}{k_1^2 + 4} - \frac{8k_1}{1+4k_1^2}} = \frac{8 - 8k_1^4}{24k_1^3 - 24k_1} = -\frac{k_1^2 + 1}{3k_1}$, 9 分

所以直线 MN 的方程为 $y - \frac{4k_1^2 - 1}{1 + 4k_1^2} = -\frac{k_1^2 + 1}{3k_1} \left(x - \frac{8k_1}{1 + 4k_1^2}\right)$, 10 分

即 $y = -\frac{k_1^2 + 1}{3k_1} \left(x - \frac{8k_1}{1 + 4k_1^2}\right) + \frac{4k_1^2 - 1}{1 + 4k_1^2}$, 整理得 $y = -\frac{k_1^2 + 1}{3k_1} \cdot x + \frac{5}{3}$ 11 分

令 $x = 0$, 得 $y = \frac{5}{3}$, 故存在定点 $G(0, \frac{5}{3})$ 满足题意. 12 分

22. (1) 解: $f'(x) = m(1+x)^{m-1} - m = m[(1+x)^{m-1} - 1]$. 由 $x > -1$, 得 $x+1 > 0$.

$f'(0) = 0$ 1 分

当 $0 < m < 1$ 时, $m-1 < 0$, $f'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减, 若 $x \in (-1, 0)$, 则 $f'(x) > 0$, 若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 2 分

当 $m > 1$ 时, $m-1 > 0$, $f'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 若 $x \in (-1, 0)$, 则 $f'(x) < 0$, 若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 3 分

(2) 解: $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin x \in (0, 1)$, $1 + \cos^2 x > 1$.

当 $a \leq 1$ 时, $a \sin x < 1$, $(1 + \cos^2 x)^{\sin x} > 1$, 所以 $a \leq 1$ 满足题意. 4 分

当 $a > 1$ 时, 由 (1) 知当 $0 < m < 1$ 时, $f(x) \leq f(0) = 0$, 即 $(1+x)^m \leq 1+mx$, 则 $(1+\cos^2 x)^{\sin x} < 1 + \sin x \cos^2 x$, 5 分

所以 $a \sin x < 1 + \sin x \cos^2 x$, 即 $a < \frac{1 + \sin x \cos^2 x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{\sin x} - \sin^2 x$.

令 $t = \sin x \in (0, 1)$, $g(t) = 1 + \frac{1}{t} - t^2$, 6 分

则 $g(t)$ 为减函数, 则 $a \leq g(1) = 1$, 这与 $a > 1$ 矛盾, 所以 $a > 1$ 不满足题意. 7 分

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$ 8 分

(3) 证明: $\frac{(1 - \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt[3]{\sin x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\sin x})}{(1 - \sin x)^{n-1}} = \frac{1 - (\sin x)^{\frac{1}{2}}}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 - (\sin x)^{\frac{1}{3}}}{1 - \sin x} \cdots$

$\frac{1 - (\sin x)^{\frac{1}{n}}}{1 - \sin x}$.

当 $m \in (0, 1)$ 时, $(1+k)^m \leq 1+mk (k > -1)$, 设 $k = \sin x - 1$ 9 分

因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 所以 $k \in (-1, 0)$, 所以 $1 - (\sin x)^m > m(1 - \sin x)$ 10 分

令 $m = \frac{1}{n} (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$, 得 $1 - (\sin x)^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{n}(1 - \sin x)$ 11 分

故 $\frac{1 - (\sin x)^{\frac{1}{2}}}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 - (\sin x)^{\frac{1}{3}}}{1 - \sin x} \cdots \frac{1 - (\sin x)^{\frac{1}{n}}}{1 - \sin x} > \frac{1}{2}(1 - \sin x) \cdot \frac{1}{3}(1 - \sin x) \cdots$

$\frac{1}{n}(1 - \sin x)$

即 $\frac{(1 - \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt[3]{\sin x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\sin x})}{(1 - \sin x)^{n-1}} > \frac{1}{n!}$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线