

山东普高大联考 11 月联合质量测评

高三数学答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A 2. C 3. B 4. C 5. D 6. B 7. C 8. D

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. AC 10. AD 11. AC 12. BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 0 14. $\frac{8}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} x$ (答案不唯一) 15. -44 16. $(1 - e^4, e^4 - 1)$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1) 由条件可得 $\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin \angle BAC}$ 2分

由正弦定理得 $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle BAC}$ ， $\therefore \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， 2分

由题意， $\frac{\pi}{2} < \angle ABC < \pi$ ， $\therefore \angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ ； 3分

(2) 因为 $\frac{BC}{BA} = \frac{CO}{AO}$ ，所以 BO 是 $\angle ABC$ 的平分线。 4分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得： $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$ ，

$\therefore 28 = 4 + BC^2 - 4BC \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ ，解得 $BC = 4$ ， 6分

由题意， $\angle DBC = \frac{\pi}{3}$ ， $S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}BD \cdot BC \cdot \sin \angle DBC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}BD = 3\sqrt{3}$ ， 8分

$\therefore BD = 3$ ，

在 $\triangle DBC$ 中，由余弦定理得：

$CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cdot \cos \angle DBC = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 13$ ，

$\therefore CD = \sqrt{13}$ 。 10分

18. 解：(1) 因为 $f'(x) = -3 + \frac{1}{x} (x > 0)$ ， 1分

所以切线斜率为 $f'(1) = -2$ ，切点为 $(1, -3)$ 。 3分

故所求切线方程为 $y - (-3) = -2(x - 1)$ ，即 $2x + y + 1 = 0$ 。 4分

(2) 方法一：分离变量

由 $f(x) \leq ax^2 - 3x$ 得 $a \geq \frac{\ln x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立， 6分

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} (x > 0)$ ，则 $a \geq g(x)_{\max}$ ，

$g'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ ，当 $g'(x) = 0$ 时， $x = \sqrt{e}$ ，即： $g'(\sqrt{e}) = 0$ ， 8分

当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时， $g'(x) > 0$ ；当 $x > \sqrt{e}$ 时， $g'(x) < 0$ ，

故 $g(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减， 10分

故当 $x = \sqrt{e}$ 时， $g(x)$ 取最大值为 $\frac{1}{2e}$ ， 11分

故 $a \geq \frac{1}{2e}$ ，即 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2e}, +\infty\right)$ 。 12分

方法二：分类讨论

由 $f(x) \leq ax^2 - 3x$ 得 $ax^2 - \ln x \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立，

令 $g(x) = ax^2 - \ln x (x > 0)$ ，则 $g'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x}$ ， 5分

① 当 $a \leq 0$ 时， $g'(x) \leq 0$ 恒成立， $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减， 7分

又 $g(1) = a \leq 0$ ，故当 $x > 1$ 时， $g(x) < 0$ ，不合题意； 8分

② 当 $a > 0$ 时，令 $g'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ ，

令 $g'(x) > 0$ 得 $x > \frac{1}{\sqrt{2a}}$ ，令 $g'(x) < 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2a}}$ ，

故 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 上单调递减， $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty\right)$ 上单调递增， 10分

故当 $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ 时， $g(x)$ 取最小值 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{\sqrt{2a}} \geq 0$ ， 11分

故 $a \geq \frac{1}{2e}$ ，即 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2e}, +\infty\right)$ ，

综上所述， a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2e}, +\infty\right)$ 。 12分



19. 解: (1) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}[n^2 + n - (n-1)^2 - (n-1)] = n$ 2分
 当 $n=1$ 时也成立, 所以 $a_n = n$; 4分
 (2) 由 (1) 知 $b_n = 3^n - 1$, 5分

$$c_n = \frac{3^{n+1}}{(3^n - 1) \cdot (3^{n+1} - 1)} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} \right)$$
 7分

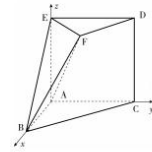
$$\therefore c_1 + c_2 + \dots + c_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3^1 - 1} - \frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} - \frac{1}{3^3 - 1} + \dots + \frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} \right)$$
 10分

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} \right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2(3^{n+1} - 1)}$$

$$\therefore \frac{3}{2(3^{n+1} - 1)} > 0, \therefore \frac{3}{4} - \frac{3}{2(3^{n+1} - 1)} < \frac{3}{4}$$
, 即 $c_1 + c_2 + \dots + c_n < \frac{3}{4}$. 12分

20. 解: (1) 因为 $DF \parallel BC$, $DF \not\subset$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $DF \parallel$ 平面 ABC ,
 在正方形 $ACDE$ 中, $DE \parallel AC$, $DE \not\subset$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC ,
 所以 $DE \parallel$ 平面 ABC .
 因为 $DE \cap DF = D$, $DE, DF \subset$ 平面 DEF ,
 所以平面 $DEF \parallel$ 平面 ABC .
 因为 $AE \perp$ 平面 ABC , 所以 $AE \perp$ 平面 DEF . 2分
 因为 $EF \subset$ 平面 DEF , 所以 $AE \perp EF$. 3分
 因为 $AE \parallel CD$, 所以 $EF \perp CD$.
 由题意知, $DE = 2$, $EF = DF = \sqrt{2}$, 则 $DE^2 = EF^2 + DF^2$, 所以 $EF \perp DF$. 4分
 因为 $CD \cap DF = D$, $CD, DF \subset$ 平面 $BCDF$,
 所以 $EF \perp$ 平面 $BCDF$. 5分
 又 $EF \subset$ 平面 BEF , 所以平面 $BCDF \perp$ 平面 BEF . 6分
 (2) 因为 $AB \perp AC$, $AE \perp$ 平面 ABC
 所以以 A 为原点, 以 AB, AC, AE 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示, 7分
 则 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), E(0, 0, 2), F(1, 1, 2)$,
 则 $\vec{AB} = (2, 0, 0), \vec{BF} = (-1, 1, 2), \vec{BE} = (-2, 0, 2)$. 8分
 设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 ABF 的法向量,
 则 $\vec{n}_1 \cdot \vec{AB} = 0$,

$\vec{n}_1 \cdot \vec{BF} = 0$, 即 $\begin{cases} 2x_1 = 0, \\ -x_1 + y_1 + 2z_1 = 0, \end{cases}$ 取 $y_1 = 2$,
 则 $\vec{n}_1 = (0, 2, -1)$ 为平面 ABF 的一个法向量. 9分
 设 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 BEF 的法向量,
 则 $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{BE} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{BF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x_2 + 2z_2 = 0, \\ -x_2 + y_2 + 2z_2 = 0, \end{cases}$ 取 $x_2 = 1$,
 则 $\vec{n}_2 = (1, -1, 1)$ 为平面 BEF 的一个法向量, 10分
 所以 $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{-3}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$.
 所以平面 ABF 与平面 EBF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 12分



21. 解: (1) 设该地区从 2023 年开始的年非环保垃圾排放量构成数列 $\{a_n\}$.
 当 $n \leq 5$ 时, $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1 = 100 - 10 = 90$, 公差为 -10 的等差数列, 2分
 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 90 - 10(n-1) = 100 - 10n$; 2分
 当 $n \geq 6$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是以 a_5 为首项, 公比为 $\frac{4}{5}$ 的等比数列,
 所以 $a_n = 50 \times (\frac{4}{5})^{n-5}$, 4分
 所以, 该地区从 2023 年开始的年非环保垃圾排放量的表达式为

$$a_n = \begin{cases} 100 - 10n, & 1 \leq n \leq 5, \\ 50 \times (\frac{4}{5})^{n-5}, & n \geq 6. \end{cases}$$
 5分
 (2) S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $M_n = \frac{S_n}{n}$. 6分
 由于 $M_{n+1} - M_n = \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{nS_{n+1} - (n+1)S_n}{n(n+1)}$

$$= \frac{n(a_{n+1} - S_n) - (a_{n+1} - a_n)}{n(n+1)} = \frac{(a_{n+1} - a_n) + (a_{n+1} - a_n) + \dots + (a_{n+1} - a_n)}{n(n+1)}$$
 8分
 由 (1) 知, $1 \leq n \leq 5$ 时, $a_n = 100 - 10n$, 所以 $\{a_n\}$ 为递减数列, 9分
 $n \geq 6$ 时, $a_n = 50 \times (\frac{4}{5})^{n-5}$, 所以 $\{a_n\}$ 为递减数列, 10分

且 $a_6 < a_5$, 所以 $\{a_n\}$ 为递减数列,
于是 $a_{n+1} - a_1 < 0, a_{n+1} - a_2 < 0, \dots, a_{n+1} - a_n < 0$, 因此 $M_{n+1} - M_n < 0$,
所以数列 $\{M_n\}$ 为递减数列.
所以认为治理措施有效.

22. 解: (1) $f(x) \geq g(x)$ 恒成立等价于 $e^x - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ 恒成立.

构造函数 $h(x) = e^x - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$h'(x) = e^x - \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

① 当 $-\frac{\pi}{4} < x < 0$ 时, $0 < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}, 1 < \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2}, e^x < 1$,

所以 $h'(x) = e^x - \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 上递减.

② 当 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}, -1 < \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, e^x \geq e^0 = 1$,

所以 $h'(x) = e^x - \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递增.

③ 当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时, $e^x > e^{\frac{\pi}{2}} > \sqrt{2}, -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$,

所以 $h'(x) = e^x - \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 上递增.

所以 $h(x) \geq h(0) = e^0 - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 0$,

即 $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0, f(x) \geq g(x)$.

(2) 当 $x > -\frac{\pi}{4}$ 时, 不等式 $f(x) + g(x) \geq 2ax + 4 (a \in R)$ 恒成立.

11 分 即 $x > -\frac{\pi}{4}$ 时, 不等式 $e^x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - ax \geq 0 (a \in R)$ 恒成立, 7 分

构造函数 $M(x) = e^x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - ax (x > -\frac{\pi}{4})$, 即 $M(x) \geq 0$,

12 分 由于 $M(x) \geq 0$ 且 $M(0) = 0$, 所以当 $x = 0$ 时, $M(x)$ 取得最小值,

由于 $M(x)$ 是可导函数, 且 $M'(x) = e^x + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - a$,

则 $x = 0$ 是函数 $M(x)$ 的极小值点,

所以 $M'(0) = e^0 + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - a = 2 - a = 0$, 解得 $a = 2$.

2 分 8 分

下面证明当 $a = 2$ 时, $x = 0$ 为 $M(x)$ 的极小值点:

此时 $M(x) = e^x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - 2x (x > -\frac{\pi}{4})$,

$M'(x) = e^x + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$,

3 分

令 $N(x) = M'(x) = e^x + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$,

$N'(x) = e^x - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

由 (1) 可知, 当 $x > -\frac{\pi}{4}$ 时, $N'(x) = e^x - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$,

4 分

所以 $N(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ 上递增,

9 分

$N(0) = M'(0) = e^0 + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - 2 = 0$,

所以在区间 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $M'(x) < 0$, $M(x)$ 递减;

在区间 $(0, +\infty)$, $M'(x) > 0$, $M(x)$ 递增,

10 分

所以 $x = 0$ 是 $M(x)$ 的极小值点, 符合题意.

11 分

所以 a 的取值集合是 $\{2\}$.

12 分

关于我们



自主选拔在线
微信号: zizzsw

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主选拔在线官方微信信号: **zizzsw**。





微信搜一搜

自主选拔在线

