

## 2024 届高三 11 月模拟测试数学试题参考答案

|   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |     |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 | 12  |
| D | A | C | B | B | B | B | B | AB | BD | AC | ABC |

解析:

$$1. \text{ 由题意知: } A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\} = \{x | -2 < x < 3\}, \quad B = \{x | 2x + 3 > 0\} = \left\{x \mid x > -\frac{3}{2}\right\},$$

所以:  $A \cup B = (-2, +\infty)$ , 故 D 项正确.

$$2. \text{ 解: 由题意, } \because (a+i)(1-ai) = a - a^2i + i - ai^2 = 2a + (1-a^2)i = -2 = -2 + 0i,$$

$$\therefore \begin{cases} 2a = -2 \\ 1 - a^2 = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } a = -1.$$

$$3. \text{ 因为 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \pm \sqrt{1 - \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)} = \pm \frac{4}{5},$$

$$\text{当 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5} \text{ 时,}$$

$$\sin \alpha = \sin\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-4\sqrt{3}}{10} < 0, \quad \alpha \text{ 为锐角, 不合题意, 舍去;}$$

$$\text{当 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4}{5} \text{ 时,}$$

$$\sin \alpha = \sin\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+4\sqrt{3}}{10} > 0, \text{ 满足题意;}$$

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$$

$$4. \text{ 由 } a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1 \quad (n \geq 3, \quad n \in \mathbb{N}^*) \text{ 可得 } a_n + a_{n-1} + 1 = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2 = 2(a_{n-1} + a_{n-2} + 1),$$

$$\text{已知 } a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \text{ 所以 } a_1 + a_2 + 1 = 3,$$

即  $\{a_n + a_{n-1} + 1\}$  是一个以 3 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } a_n + a_{n-1} + 1 = 3 \times 2^{n-2}, \text{ 即 } a_n + a_{n-1} = 3 \times 2^{n-2} - 1 \quad (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*),$$

$$a_1 + a_2 = 3 \times 2^0 - 1, \quad a_3 + a_4 = 3 \times 2^2 - 1, \quad a_5 + a_6 = 3 \times 2^4 - 1, \quad \dots, \quad a_{59} + a_{60} = 3 \times 2^{58} - 1,$$

$$S_{60} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{60} = 3(2^0 + 2^2 + \cdots + 2^{58}) - 30$$

$$= 3 \times \frac{1-4^{30}}{1-4} - 30 = 4^{30} - 31,$$

5. ①恰有 2 个部门所选的旅游地相同,

第一步, 先将选相同的 2 个部门取出, 有  $C_4^2 = 6$  种;

第二步, 从 6 个旅游地中选出 3 个排序, 有  $A_6^3 = 120$  种,

根据分步计数原理可得, 方法有  $6 \times 120 = 720$  种;

②4 个部门所选的旅游地都不相同的方法有  $A_6^4 = 360$  种,

根据分类加法计数原理得, 则甲、乙、丙、丁四个部门至少有三个部门所选旅游地全不相同的方法种数共有  $720 + 360 = 1080$  种.

$$6. t > \frac{1}{2}, h(t) = e^{t-1} > e^{-\frac{1}{2}}, 2t-1 > 0, g(t) \text{ 的值域是 } (-\infty, +\infty),$$

$$\text{设 } h(t_1) = g(t_2) = m, \text{ 则 } m > e^{-\frac{1}{2}},$$

$$e^{t_1-1} = m, t_1 = \ln m + 1, \ln(2t_2 - 1) + 2 = m, t_2 = \frac{1}{2}e^{m-2} + \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } t_2 - t_1 = \frac{1}{2}e^{m-2} + \frac{1}{2} - \ln m - 1 = \frac{1}{2}e^{m-2} - \ln m - \frac{1}{2},$$

$$\text{设 } f(x) = \frac{1}{2}e^{x-2} - \ln x - \frac{1}{2} (x > e^{-\frac{1}{2}}),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x-2} - \frac{1}{x},$$

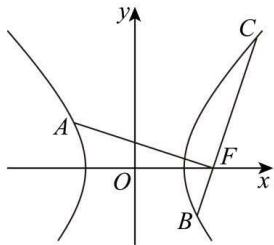
$$\text{设 } F(x) = f'(x), \text{ 则 } F'(x) = \frac{1}{2}e^{x-2} + \frac{1}{x^2} > 0, f'(x) \text{ 是增函数},$$

$$\text{又 } f'(2) = 0, \text{ 因此 } e^{-\frac{1}{2}} < x < 2 \text{ 时, } f'(x) < 0, f(x) \text{ 递减, } x > 2 \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x) \text{ 递增},$$

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} = -\ln 2,$$

$$\text{所以 } t_2 - t_1 \text{ 的最小值是 } -\ln 2,$$

$$7. \text{ 由题设 } F(c, 0), \text{ 令 } A(m, n) \text{ 且 } m < -a, C(x, y), \text{ 则 } B(-m, -n), \text{ 且 } \frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = 1 \text{ ①},$$



$$\text{由 } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FB} = (c-m, -n) \cdot (-m-c, -n) = m^2 - c^2 + n^2 = 0, \text{ 即 } m^2 + n^2 = c^2 \text{ ②},$$



$$\text{由 } 3\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FC} \Rightarrow 3(c+m, n) = (x-c, y) \Rightarrow \begin{cases} x = 4c + 3m \\ y = 3n \end{cases}, \text{ 即 } C(4c + 3m, 3n),$$

$$\text{又 } C \text{ 在双曲线上, 则 } \frac{(4c+3m)^2}{a^2} - \frac{9n^2}{b^2} = 1 \quad (3),$$

$$\text{由 } (1) \text{ 得: } \frac{n^2}{b^2} = \frac{m^2}{a^2} - 1, \text{ 代入 } (3) \text{ 并整理得: } 2c^2 + 3mc + a^2 = 0,$$

$$\text{由 } (1)(2) \text{ 及 } a^2 + b^2 = c^2 \text{ 得: } n^2 = \frac{m^2 b^2}{a^2} - b^2 = c^2 - m^2 \Rightarrow m^2 = 2a^2 - \frac{a^4}{c^2},$$

$$\text{所以 } (2c^2 + a^2)^2 = 9m^2 c^2 = 18a^2 c^2 - 9a^4, \text{ 即 } 2c^2 - 7a^2 c^2 + 5a^4 = (2c^2 - 5a^2)(c^2 - a^2) = 0,$$

$$\text{显然 } a^2 \neq c^2, \text{ 则 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$8. \text{ 令 } f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 9,$$

$$\text{则 } f(x-1) = -(x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 9(x-1) + 9 = -x^3 + 12x - 2,$$

$$f(-x-1) = -(-x-1)^3 - 3(-x-1)^2 + 9(-x-1) + 9 = x^3 - 12x - 2,$$

$$\therefore f(x-1) + f(-x-1) = -4, \therefore f(x) \text{ 关于 } (-1, -2) \text{ 中心对称};$$

$$\therefore y = \frac{1-2x}{x+1} = \frac{-2(x+1)+3}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}, \therefore y = \frac{1-2x}{x+1} \text{ 关于 } (-1, -2) \text{ 中心对称};$$

$$\therefore f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x+3)(x-1),$$

$$\therefore \text{当 } x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \text{ 时, } f'(x) < 0; \text{ 当 } x \in (-3, 1) \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

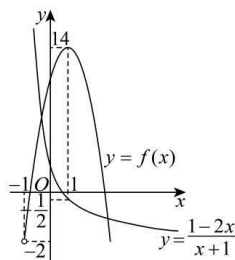
$$\therefore f(x) \text{ 在 } (-\infty, -3), (1, +\infty) \text{ 上单调递减, 在 } (-3, 1) \text{ 上单调递增},$$

$$\therefore f(x) \text{ 极小值为 } f(-3) = 27 - 27 - 27 + 9 = -18, \text{ 极大值为 } f(1) = -1 - 3 + 9 + 9 = 14;$$

$$\text{当 } x \in (-1, +\infty) \text{ 时, } y = -2 + \frac{3}{x+1} \text{ 单调递减, 且 } y = -2 + \frac{3}{x+1} > -2,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = -2 + \frac{3}{1+1} = -\frac{1}{2} < 14;$$

$$\text{作出 } f(x) \text{ 与 } y = \frac{1-2x}{x+1} \text{ 在 } x > -1 \text{ 时的图象如下图所示,}$$





由图象可知:  $f(x)$  与  $y = \frac{1-2x}{x+1}$  在  $(-1, +\infty)$  上有且仅有两个不同的交点,

由对称性可知:  $f(x)$  与  $y = \frac{1-2x}{x+1}$  在  $(-\infty, -1)$  上有且仅有两个不同的交点,

$$\therefore \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = (-1) \times 2 \times 2 + (-2) \times 2 \times 2 = -12.$$

9. A 选项,  $g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin(2x + \pi) = -2\sin 2x,$

由于  $g(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 且  $g(-x) = -2\sin(-2x) = \sin 2x = -g(x),$

故  $g(x)$  为奇函数, A 正确;

B 选项,  $g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2,$  故  $g(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{4}$  对称, B 正确;

C 选项,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时,  $2x \in [0, \pi],$  其中  $y = -\sin z$  在  $z \in [0, \pi]$  上不单调,

故  $g(x) = -2\sin 2x$  在  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上不单调, 故 C 错误;

D 选项,  $g(x) \leq 0,$  则  $\sin 2x > 0,$  则  $2x \in [k\pi, k\pi + \pi], k \in \mathbb{Z},$

故  $x \in \left[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi + \pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z},$  D 错误.

10. 设这 5 个数字为  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,$

对于 A: 若取到数字 4, 不妨设为  $x_1 = 4,$

则  $\frac{4 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 2,$  可得  $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6,$

可知这 4 个数中至少有 2 个 1, 不妨设为  $x_2 = x_3 = 1,$

则这 5 个数字的方差  $s^2 = \frac{1}{5}[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 + (x_4 - 2)^2 + (x_5 - 2)^2]$

$$\geq \frac{1}{5}[(4 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (1 - 2)^2] = \frac{6}{5} > 1,$$

不合题意, 故 A 错误;

对于 C: 因为这 5 个数字的平均数为 2, 这 5 个数字至少有 1 个 1, 不妨设为  $x_1 = 1,$

若极差是 4, 这最大数为 5, 不妨设为  $x_2 = 5,$

则这 5 个数字的平均数  $\bar{x} = \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \frac{1}{5}(1 + 5 + x_3 + x_4 + x_5) = 2,$

则  $x_3 + x_4 + x_5 = 4,$  可知这 3 个数有 2 个 1, 1 个 2,

此时这 5 个数字的方差  $s^2 = \frac{1}{5}[(1 - 2)^2 + (5 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 2)^2] = \frac{12}{5} > 1,$

不合题意, 故 C 错误;

对于 BD: 例如 2, 2, 2, 2, 2, 可知这 5 个数字的平均数为 2, 方差为 0, 符合题意, 且中位数是 2, 众数是 2, 故 BD 正确;

11. 对于 A, 因为  $SO \perp$  面  $ABC$ , 所以  $\angle SCO$  是  $SC$  与底面所成角, 在  $Rt\triangle SOC$  中, 圆锥的母线长是  $2\sqrt{2}$ , 半径  $r = OC = 2$ ,

则  $\cos \angle SCO = \frac{OC}{SC} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $\angle SCO = 45^\circ$ , 则 A 正确;

对于 B, 圆锥  $SO$  的侧面积为  $\pi rl = 4\sqrt{2}\pi$ , 表面积为  $4\sqrt{2}\pi + 4\pi$ , 则 B 错误;

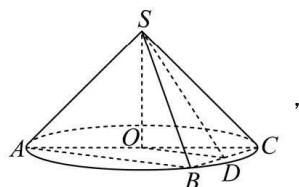
对于 C, 当点  $B$  与点  $A$  重合时,  $\angle ASB = 0$  为最小角,

当点  $B$  与点  $C$  重合时  $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$ , 达到最大值,

又因为  $B$  与  $A, C$  不重合, 则  $\angle ASB \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,

又  $2\angle SAB + \angle ASB = \pi$ , 可得  $\angle SAB \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ , 则 C 正确;

对于 D, 如图所示,



取  $BC$  的中点  $D$ , 连接  $OD, SD$ , 又  $O$  为  $AC$  的中点, 则  $OD \parallel AB$ ,

因为  $AB \perp BC$ , 所以  $BC \perp OD$ , 又  $SO \perp$  面  $ABC$ ,  $BC \subset$  面  $ABC$ , 所以  $BC \perp SO$ ,

又  $SO \cap OD = O$ ,  $BC \perp$  面  $SOD$ , 故  $BC \perp SD$ ,

所以  $\angle SDO$  为二面角  $S-BC-O$  的平面角,

因为点  $B$  为弧  $AC$  的中点, 所以  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $OD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$ , 则  $\tan \angle SDO = \frac{SO}{OD} = \sqrt{2}$ , 则 D 错误.

12. 设  $P(x, y)$ , 由  $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{3}{2}$ , 得  $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \cdot \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \frac{3}{2}$ , 整理得  $4(x^2 + y^2 + 1)^2 - 16y^2 = 9$ ,

若点  $(x_0, y_0)$  在曲线  $C$  上, 显然  $(-x_0, y_0), (x_0, -y_0)$  都满足方程, 即点  $(-x_0, y_0), (x_0, -y_0)$  也在曲线  $C$  上,

因此曲线  $C$  关于坐标轴对称, A 正确;

由  $\sqrt{9+16y^2} = 2(x^2 + y^2 + 1) \geq 2(y^2 + 1)$ , 得  $(2y^2 + 1)(2y^2 - 5) \leq 0$ , 解得  $y^2 \leq \frac{5}{2}$ , 当且仅当  $x=0$  时取等号,

因此点  $P$  到原点  $O$  的距离  $|PO| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4y^2 + \frac{9}{4} - 1} \leq \sqrt{4 \times \frac{5}{2} + \frac{9}{4} - 1} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ,

于是当  $x=0, y^2 = \frac{5}{2}$  时, 点  $P$  到原点距离取得最大值  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ , B 正确;

显然  $\triangle F_1PF_2$  的周长为  $2 + |PF_1| + |PF_2| \geq 2 + 2\sqrt{|PF_1||PF_2|} = 2 + \sqrt{6}$ , 当且仅当  $|PF_1| = |PF_2| = \frac{\sqrt{6}}{2}$  时取等号, C 正确;

由曲线  $C$  的方程  $4(x^2 + y^2 + 1)^2 - 16y^2 = 9$ , 得  $x^2 = \sqrt{4y^2 + \frac{9}{4}} - y^2 - 1$ ,

当  $x^2 > \frac{1}{2}$  时,  $\sqrt{4y^2 + \frac{9}{4}} - y^2 - 1 > \frac{1}{2}$ , 即  $\sqrt{4y^2 + \frac{9}{4}} > y^2 + \frac{3}{2}$ , 两边平方解得  $0 < y^2 < 1$ ,



即当曲线  $C$  的点  $P(x, y)$  满足  $0 < y^2 < 1$  时, 点  $P$  到  $y$  轴距离  $|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $D$  错误.

13.  $-\frac{7}{9}$

14. 60

15. 5001

16.  $(-1, 0)$

13. 由  $\sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}$ , 得  $\cos\left(2\alpha - \frac{5\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right) = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$ ,

所以  $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\alpha + \pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(2\alpha - \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{7}{9}$ .

14.  $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  展开式的通项为  $T_{r+1} = C_6^r \cdot (2x)^{6-r} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_6^r \cdot 2^{6-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{6-\frac{3r}{2}}$ ,

取  $6 - \frac{3}{2}r = 0$ , 解得  $r = 4$ , 常数项为  $C_6^4 \cdot 2^{6-4} \cdot (-1)^4 = 60$ .

15. 因为  $a_1 = 1$ , 对任意正整数  $k$ ,  $a_{2k-1}$ ,  $a_{2k}$ ,  $a_{2k+1}$  成等差数列, 公差为  $2k$ ,

所以  $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 4k$

当  $n = 2k - 1$  时, 可得

$$a_n = a_{2k-1} = a_1 + (a_3 - a_1) + (a_5 - a_3) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k-3}) = 1 + 4 + 8 + \cdots + 4(k-1) = 2k(k-1) + 1 = \frac{(n+1)^2}{2} - n,$$

当  $2k - 1 = 99, k = 50$  时,

$$a_{100} = a_{2 \times 50} = a_{2 \times 50 - 1} + 2 \times 50 = 2 \times 50^2 - 2 \times 50 + 1 + 2 \times 50 = 5001$$

所以当  $n = 100$  时,  $a_{100} = 5001$

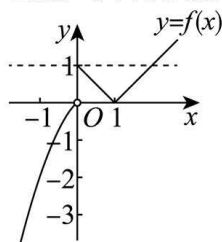
16. 设  $t = f(x)$ , 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = |x - 1|$ , 此时  $t \geq 0$ ,

由  $f(t) = 0$ , 得  $t = 1$ , 即  $f(x) = |x - 1| = 1$ , 解得  $x = 0$  或  $x = 2$ ,

即  $y = f(f(x))$  在  $[0, +\infty)$  上有 2 个零点;

若  $a \geq 0$ ,  $f(x) = -x^2 + 2ax$ , 其图象对称轴为  $x = a$ ,

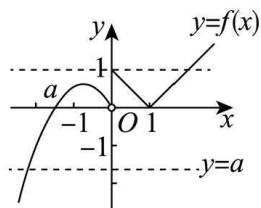
函数  $y = f(x)$  的大致图像如图:



则此时  $f(x) = -x^2 + 2ax < 0$ , 即  $t < 0$ , 则  $f(t) < 0$ ,

即  $f(t) = 0$  无解, 则  $t = f(x)$  无零点, 此时  $y = f(f(x))$  无零点, 不符合题意;

故需  $a < 0$ , 此时函数  $y = f(x)$  的大致图像如图:



由  $f(t)=0$  得  $t=1$  或  $t=a$ ,

要使得函数  $y=f(f(x))$  恰有 3 个零点, 需满足  $y=f(f(x))$  在  $(-\infty, 0)$  上有一个零点  
此时  $f(x)=a$  只有一个解, 故只需  $t=1$  与函数  $t=f(x)$  在  $y$  轴左侧图象无交点,

则需  $f(a)=-a^2+2a^2<1$ , 解得  $-1<a<1$ , 结合  $a<0$ ,

可得  $a\in(-1, 0)$ ,

17. (1)  $\because a=b(\sqrt{3}\sin C+\cos C)$ , 根据正弦定理得,  $\sin A=\sin B(\sqrt{3}\sin C+\cos C)$ ,

即  $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sqrt{3}\sin B\sin C+\sin B\cos C$ ,

所以  $\cos B\sin C=\sqrt{3}\sin B\sin C$ , 因为  $\sin C>0$ ,

所以  $\cos B=\sqrt{3}\sin B$ , 所以  $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

因为  $B\in(0, \pi)$ , 所以  $B=\frac{\pi}{6}$ .

(2) 因为  $BC=2\sqrt{3}$ ,  $BD=1$ ,  $B=\frac{\pi}{6}$ , 根据余弦定理得

$$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot\cos B=1+12-2\times 1\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7, \therefore CD=\sqrt{7}.$$

$$\because \angle BDC=\frac{\pi}{2}+\angle A, \therefore \sin \angle BDC=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\angle A\right)=\cos A.$$

$$\text{在 } \triangle BDC \text{ 中, 由正弦定理知, } \frac{BC}{\sin \angle BDC}=\frac{CD}{\sin \angle B}, \therefore \frac{2\sqrt{3}}{\cos A}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}},$$

$$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{21}}{7}, A\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \sin A=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\therefore \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{CD}{AC}, \therefore AC=\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

18. (1) 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q(q>0)$ ,

因为  $a_{n+1}+a_{n+2}=12a_n$ , 即  $a_n\cdot q+a_nq^2=12a_n$ ,

且  $a_n\neq 0$ , 可得  $q^2+q-12=0$ , 解得  $q=3$  或  $q=-4$  (舍去).

$$\text{又因为 } S_5=\frac{a_1(1-3^5)}{1-3}=121, \text{ 解得 } a_1=1,$$

所以  $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=3^{n-1}$ .

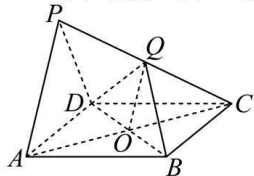
(2) 由 (1) 可得:  $b_n = 3^{n-1} + (n-1)\ln 3$ ,

所以  $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = (3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]\ln 3$

$$= \frac{1-3^n}{1-3} + \frac{(n-1)n}{2}\ln 3 = \frac{3^n - 1 + (n-1)n\ln 3}{2},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{3^n - 1 + (n-1)n\ln 3}{2}.$$

19. (1) 证明: 连  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ , 连  $OQ$ .



由  $ABCD$  为正方形知  $O$  为  $AC$  中点, 又  $Q$  为  $PC$  中点, 故  $AP \parallel OQ$ ,

又  $AP \not\subset$  平面  $BDQ$  且  $OQ \subset$  平面  $BDQ$ ,

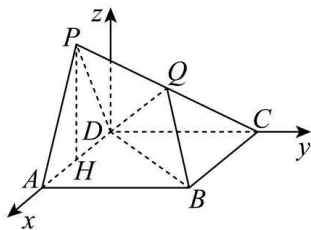
所以  $AP \parallel$  平面  $BDQ$ .

(2) 取  $AD$  中点  $H$ , 连  $PH$ , 由  $\triangle PAD$  为等边三角形得  $PH \perp AD$ .

又平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD, PH \subset$  平面  $PAD$ ,

所以  $PH \perp$  平面  $ABCD$ ,

以  $D$  为原点,  $DA, DC$  所在直线分别为  $x$  轴、 $y$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



设  $AB = 2$ , 则  $P(1, 0, \sqrt{3}), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), Q(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{DB} = (2, 2, 0), \overrightarrow{DQ} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

平面  $PAD$  就是坐标平面  $xDz$ , 故可取其法向量  $\vec{n}_1 = (0, 1, 0)$ ,

设平面  $QBD$  一个法向量为  $\vec{n}_2 = (x, y, z)$ ,

$$\text{即 } \begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \overrightarrow{DQ} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases},$$

令  $x = \sqrt{3}$ , 则  $y = -\sqrt{3}, z = 1$ , 得  $\vec{n}_2 = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$ ,

记平面  $PAD$  与平面  $QBD$  夹角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

所以平面  $PAD$  与平面  $QBD$  夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

20. 1) 由题意, 这组学生数学成绩和知识竞赛成绩的样本相关系数为

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{21650}{\sqrt{6464 \times 14950}} \approx \frac{21650}{31000} \approx 0.70;$$

(2) (i) 证明: 因为  $\{R_i\}$  和  $\{S_i\}$  都是  $1, 2, \dots, N$  的一个排列, 所以

$$\sum_{i=1}^N R_i = \sum_{i=1}^N S_i = \frac{N(N+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^N R_i^2 = \sum_{i=1}^N S_i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

从而  $\{R_i\}$  和  $\{S_i\}$  的平均数都是  $\bar{R} = \bar{S} = \frac{N+1}{2}$ .

$$\text{因此, } \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2 = \sum_{i=1}^N R_i^2 - 2\bar{R} \sum_{i=1}^N R_i + \sum_{i=1}^N \bar{R}^2 = \sum_{i=1}^N R_i^2 - N\bar{R}^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N(N+1)^2}{4} = \frac{N(N+1)(N-1)}{12},$$

$$\text{同理可得 } \sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S})^2 = \frac{N(N+1)(N-1)}{12},$$

$$\text{由于 } \sum_{i=1}^N d_i^2 = \sum_{i=1}^N (R_i - S_i)^2 = \sum_{i=1}^N [(R_i - \bar{R}) - (S_i - \bar{S})]^2 = \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2 + \sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S})^2 - 2$$

$$\sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S}) = 2 \cdot \frac{N(N+1)(N-1)}{12} - 2 \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S}),$$

$$\text{所以 } \rho = \frac{\sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S})^2}} = \frac{\frac{N(N+1)(N-1)}{12} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N d_i^2}{\frac{N(N+1)(N-1)}{12}} = 1 - \frac{6}{N(N^2-1)} \sum_{i=1}^N d_i^2.$$

(ii) 这组学生的数学成绩和知识竞赛成绩的斯皮尔曼相关系数是 0.91,

答案①: 斯皮尔曼相关系数对于异常值不太敏感, 如果数据中有明显的异常值, 那么用斯皮尔曼相关系数比用样本相关系数更能刻画某种线性关系;

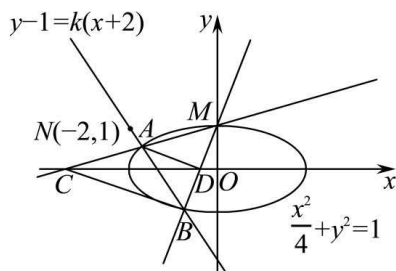
答案②: 斯皮尔曼相关系数刻画的是样本数据排名的样本相关系数, 与具体的数值无关, 只与排名有关. 如果一组数据有异常值, 但排名依然符合一定的线性关系, 则可以采用斯皮尔曼相关系数刻画线性关系.

$$21. (1) \text{ 设点 } P(x, y), \text{ 依题意可得 } \frac{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + y^2}}{\left| \frac{4\sqrt{3}}{3} - x \right|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } (x-\sqrt{3})^2 + y^2 = \frac{3}{4} \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} - x \right)^2,$$

化简得  $x^2 + 4y^2 = 4$ , 即  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(2) 如图所示:



设直线  $AB$  的方程为  $y-1=k(x+2)$ ,  $k < 0$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

联立方程组  $\begin{cases} y=kx+2k+1 \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$ , 可得  $(1+4k^2)x^2+8k(2k+1)x+16k^2+16k=0$ ,

$$\Delta = [8k(2k+1)]^2 - 4(1+4k^2)(16k^2+16k)$$

$$= 64k^2(4k^2+4k+1) - 64(k^2+k)(4k^2+1) = -64k > 0,$$

$$\text{由韦达定理有 } x_1+x_2 = \frac{-8k(2k+1)}{1+4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{16k(k+1)}{1+4k^2},$$

$$\text{且由求根公式有 } (x_1-x_2)^2 = \left( \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{a^2} = \frac{-64k}{(1+4k^2)^2},$$

$$\text{直线 } MA \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1-1}{x_1}x+1, \therefore x_C = \frac{x_1}{1-y_1}, \text{ 同理 } x_D = \frac{x_2}{1-y_2},$$

$$\because y_1=kx_1+2k+1, \quad y_2=kx_2+2k+1, \therefore y_1-y_2=k(x_1-x_2),$$

$$x_D - x_C = \frac{x_2}{-k(x_2+2)} - \frac{x_1}{-k(x_1+2)} = \frac{2(x_1-x_2)}{k(x_1+2)(x_2+2)},$$

$$\therefore S_{ACBD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}|CD|(|y_1|+|y_2|) = \frac{1}{2}|x_D-x_C||y_1-y_2|$$

$$= \left| \frac{(x_1-x_2)^2}{(x_1+2)(x_2+2)} \right| = \left| \frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} \right|,$$

$$\text{又 } x_1x_2+2(x_1+x_2)+4 = \frac{16k(k+1)}{1+4k^2} - \frac{16k(2k+1)}{1+4k^2} + 4 = \frac{4}{1+4k^2}, \text{ 且 } (x_1-x_2)^2 = \left( \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{a^2} = \frac{-64k}{(1+4k^2)^2},$$

$$\text{所以 } S_{ACBD} = \left| \frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} \right| = \frac{\frac{-64k}{(1+4k^2)^2}}{\frac{4}{1+4k^2}} = \frac{-16k}{4k^2+1} = \frac{16}{(-4k)+(-\frac{1}{k})} \leq \frac{16}{4} = 4,$$

当且仅当  $k = -\frac{1}{2}$  时, 四边形  $ACBD$  的面积最大, 最大值为 4.

22. (1) 由已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,



由  $f(x) = 2\ln x - ax + 1 = 0$ , 得  $a = \frac{2\ln x + 1}{x}$ ,

令函数  $u(x) = \frac{1+2\ln x}{x}$ ,  $u'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^2}$ ,

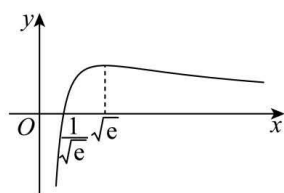
当  $0 < x < \sqrt{e}$  时,  $u'(x) > 0$ , 函数  $u(x)$  在  $(0, \sqrt{e})$  上单调递增,

当  $x > \sqrt{e}$  时,  $u'(x) < 0$ , 函数  $u(x)$  在  $(\sqrt{e}, +\infty)$  单调递减,

所以  $u(x)_{\max} = u(\sqrt{e}) = \frac{2}{\sqrt{e}} = \frac{2\sqrt{e}}{e}$ ,

因为  $u\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2\ln x}{x} \rightarrow -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2\ln x}{x} = 0$ ,

可知函数  $u(x)$  的图象如下所示:



所以当  $a > \frac{2\sqrt{e}}{e}$  时, 函数  $f(x)$  的零点个数为 0 个, 当  $a \leq 0$  或  $a = \frac{2\sqrt{e}}{e}$  时, 函数  $f(x)$  的零点个数 1 个, 当  $0 < a < \frac{2\sqrt{e}}{e}$

时, 函数  $f(x)$  的零点个数 2 个.

(2) 由题设方程  $f(x) = g(x)$ , 即  $2\ln x - ax + 1 = e^{ax} - ex^2$ ,

所以  $ax + e^{ax} = 2\ln x + ex^2 + 1 = \ln ex^2 + e^{\ln ex^2}$ ,

令  $\varphi(x) = x + e^x$ , 得  $\varphi(ax) = \varphi(\ln ex^2)$ ,

又  $\varphi'(x) = 1 + e^x > 0$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立, 所以  $\varphi(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $ax = \ln ex^2$ , 即  $ax = 1 + 2\ln x$ ,

由已知, 方程  $ax = 1 + 2\ln x$  有两个实根  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ),

即  $a = \frac{1+2\ln x}{x}$  有两个实根  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 由 (1) 得  $\frac{1}{\sqrt{e}} < x_1 < \sqrt{e} < x_2$ .

令  $\frac{1}{x_1} = t_1, \frac{1}{x_2} = t_2$  ( $0 < t_2 < \frac{1}{\sqrt{e}} < t_1 < \sqrt{e}$ ),

所以  $\begin{cases} a = t_1 - 2t_1 \ln t_1, \\ a = t_2 - 2t_2 \ln t_2, \end{cases}$

令  $h(t) = t - 2t \ln t$  ( $t > 0$ ), 所以  $h(t) = a$  有两个实根  $t_1, t_2$ ,

先证  $t_1 + t_2 > \frac{2}{\sqrt{e}}$ .

因为  $h'(t) = 1 - 2\ln t$ , 令  $h'(t) > 0$ , 解得  $0 < t < \frac{1}{\sqrt{e}}$ , 令  $h'(t) < 0$ , 解得  $t > \frac{1}{\sqrt{e}}$ ,

所以  $h(t)$  在  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$  上单调递增, 在  $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$  上单调递减, 要证  $t_1 + t_2 > \frac{2}{\sqrt{e}}$ , 即证  $t_1 > \frac{2}{\sqrt{e}} - t_2$ ,

因为  $t_1 > \frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}} - t_2 > \frac{1}{\sqrt{e}}, h(t)$  在  $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$  上单调递减, 只需证  $h(t_1) < h\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t_2\right)$ ,

即证  $h(t_1) < h\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t_2\right)$ .

令  $F(t) = h(t) - h\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t\right) \left(0 < t < \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ,

$F'(t) = h'(t) + h'\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t\right) = -1 - 2\ln t - 1 - 2\ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t\right) = -2 - 2\ln\left[t\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t\right)\right]$ ,

因为  $t\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t\right) = -t^2 + \frac{2t}{\sqrt{e}} \left(0 < t < \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ,

令  $k(t) = -t^2 + \frac{2t}{\sqrt{e}} \left(0 < t < \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ,

可知函数  $k(t)$  在  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$  上单调递增, 所以  $0 < t\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t\right) < \frac{1}{e}$ , 所以  $\ln\left[t\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t\right)\right] < -1$ ,

所以  $-2 - 2\ln\left[t\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t\right)\right] > 0$ , 即  $F'(t) > 0$  在  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$  上恒成立,

所以  $F(t)$  在  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$  上单调递增, 所以  $F(t) < F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0$ , 所以  $h(t_1) < h\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t_2\right)$  成立,

即  $h(t_1) < h\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - t_2\right)$  成立, 又  $t_1 > \frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}} - t_2 > \frac{1}{\sqrt{e}}$ , 且  $h(t)$  在  $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$  上单调递减,

所以  $t_1 > \frac{2}{\sqrt{e}} - t_2$ , 所以  $t_1 + t_2 > \frac{2}{\sqrt{e}}$ , 即  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{2}{\sqrt{e}}$ , 所以  $\frac{1}{x_2} > \frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{1}{x_1}$ ,

所以  $x_1 - \frac{1}{x_2} < x_1 + \frac{1}{x_1} - \frac{2}{\sqrt{e}} < \sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}$ , 即  $x_1 - \sqrt{e} < \frac{1}{x_2} - \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线