“天一大联考·皖豫名校联盟”2024 届高中毕业班第二次考试

数学·答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 答案 A

命题意图 本题考查集合的运算.

解析 $A=\{y|y\geqslant 0\}$，$B=\{x|-5\leqslant x<3\}$，所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<3\}$.

2. 答案 B

命题意图 本题考查复数的运算及复数的虚部的定义.

解析 由 $(1+i)z=1+2i$，得 $z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$，所以 z 的虚部为 $\frac{1}{2}$.

3. 答案 D

命题意图 本题考查向量的数量积及命题的真假.

解析 由题可知命题 p 的否定：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\geqslant 0$，且否定是真命题，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2-4ax+2\geqslant 0$ 是真命题. 当 $a=0$ 时，$2\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$；当 $a\neq 0$ 时，$a>0$ 且 $16a^2-8a\leqslant 0$，所以 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$. 综上，实数 a 的取值范围是 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

4. 答案 A

命题意图 本题考查等差数列的定义及充分条件与必要条件的判断.

解析 是充要条件，证明如下：$(\Rightarrow)$ 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，设其公差为 $d(d\neq 0)$，则 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，所以 $r=0$；$(\Leftarrow)$ 若 $r=0$，则 $S_n=pn^2+qn(p\neq 0)$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=p+q$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2pn+q-p$，此时 $n=1$ 也满足，所以 $a_n=2pn+q-p$，于是有 $a_{n+1}-a_n=2p$，$\{a_n\}$ 是等差数列. 所以“$\{a_n\}$ 是等差数列”是“$r=0$”的充要条件.

5. 答案 A

命题意图 本题考查函数的奇偶性及单调性.

解析 易得 $f(x)$ 是偶函数，当 $x>0$ 时 $f'(x)=e^x-e^{-x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\frac{\pi}{2}<A+B<\pi$，$0<\frac{\pi}{2}-B<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)<\sin A$，即 $0<\cos B<\sin A$，同理，$0<\cos C<\sin B$，$0<\cos A<\sin C$，所以 A 正确，B，C 错误，当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时，D 错误.

6. 答案 C

命题意图 本题考查解三角形.

解析 设 $\angle ABD=\angle ADB=\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\angle ACD=\frac{\pi}{2}-\alpha$，$\angle CAD=2\alpha-\frac{\pi}{2}$，$\therefore\sin\angle CAD=\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2\alpha$. 在 $\triangle ACD$ 中，$\because AC=3$ cm，$CD=\sqrt{3}$ cm，$\therefore AC=\sqrt{3}CD$，由正弦定理得 $\sin\angle ADC=\sqrt{3}\sin\angle CAD$，$\therefore\sin(\pi-$

$\alpha)=\sqrt{3}(-\cos 2\alpha)$，$\therefore \sin\alpha=\sqrt{3}(2\sin^2\alpha-1)$，即 $2\sqrt{3}\sin^2\alpha-\sin\alpha-\sqrt{3}=0$，解得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \alpha=\frac{\pi}{3}$（舍去负值），$\therefore \angle ADC=\frac{2\pi}{3}$. 设圆 O_1,O_2 的半径分别为 r_1,r_2，由题可知 $\triangle ABD$ 为正三角形，边长为 $\sqrt{3}$ cm，$\triangle ACD$ 为等腰三角形，$CD=AD=\sqrt{3}$ cm，$AC=3$ cm，由等面积法解得 $r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \pi r_1^2+\pi r_2^2=(16-9\sqrt{3})\pi$.

7. **答案**　D

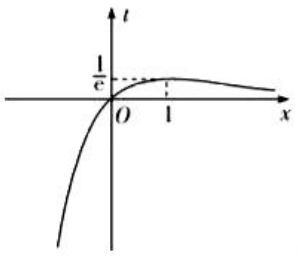
命题意图　本题考查排列与组合的应用.

解析　录用 3 人，有 $C_5^3A_3^3=60$ 种情况；录用 4 人，有 $C_5^4C_4^2A_3^3-C_3^2A_3^3=162$ 种情况；录用 5 人，有 $\left(\frac{C_5^1C_4^2}{A_2^2}A_3^3-C_3^2A_3^3\right)+(C_5^3A_3^3-C_3^1A_3^3)=114$ 种情况. 所以共有 336 种.

8. **答案**　D

命题意图　本题考查导数的综合应用.

解析　令 $f(x)=0$，得 $x^2-axe^x+ae^{2x+1}=0$，即 $\frac{x^2}{e^{2x}}-\frac{ax}{e^x}+ae=0$. 记 $t=\frac{x}{e^x}$，则 $t^2-at+ae=0$，对 $t=\frac{x}{e^x}$ 求导得 $t'=\frac{1-x}{e^x}$，因为当 $x<1$ 时，$t'>0$，当 $x>1$ 时，$t'<0$，所以函数 $t=\frac{x}{e^x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且当 $x\to+\infty$ 时，$t>0$ 且 $t\to0$，当 $x=0$ 时，$t=0$，当 $x\to-\infty$ 时，$t\to-\infty$，则函数 $t=\frac{x}{e^x}$ 的大致图象如图所示.



记 $g(t)=t^2-at+ae$，由于 $f(x)$ 有三个不同的零点，所以 $g(t)$ 必有两个不同的零点，记为 t_1,t_2.

(1) 当 $t_1=\frac{1}{e}$，$0<t_2<\frac{1}{e}$ 时，有 $\begin{cases} g\left(\frac{1}{e}\right)=0, \\ g(0)>0, \\ 0<\frac{a}{2}<\frac{1}{e}, \end{cases}$ 无解；

(2) 当 $t_1=0$，$0<t_2<\frac{1}{e}$ 时，有 $\begin{cases} g\left(\frac{1}{e}\right)>0, \\ g(0)=0, \\ 0<\frac{a}{2}<\frac{1}{e}, \end{cases}$ 无解；

(3) 当 $t_1<0$，$0<t_2<\frac{1}{e}$ 时，有 $\begin{cases} g\left(\frac{1}{e}\right)>0, \\ g(0)<0, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{e-e^3}<a<0$.

综上，a 的取值范围为$\left(\frac{1}{e-e^3},0\right)$.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.每小题全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. **答案** BC

命题意图 本题考查回归分析及独立性检验的相关概念.

解析 当样本相关系数 $r=\pm1$ 时，成对样本数据的两个分量之间满足一种线性关系，故A正确；残差等于观测值减去预测值，故B错误；决定系数 R^2 越大，模型拟合效果越好，故C错误；根据独立性检验的规则，可知D正确.

10. **答案** BCD

命题意图 本题考查三角函数的性质及导数的几何意义.

解析 因为 $f(-x)=\cos 2x+\sin x\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 不是奇函数，故A错误；令 $f(x)=0$，得 $\cos 2x-\sin x=0$，即 $2\sin^2x+\sin x-1=0$，所以 $\sin x=\frac{1}{2}$ 或 $\sin x=-1$，$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0,1,\cdots,9$ 时，对应最小的10个正零点，它们的和为 $\sum\limits_{k=0}^{9}\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{95\pi}{3}$，故B正确；由于 $f(2\pi+x)=f(x)$，故C正确；$f(0)=1$，$f'(x)=-2\sin 2x-\cos x$，$f'(0)=-1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-x+1$，故D正确.

11. **答案** AC

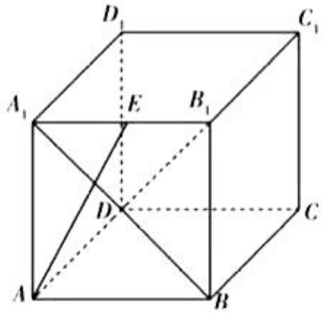
命题意图 本题考查基本不等式的应用及函数的单调性.

解析 $S=(x+z)(y+z)=xy+xz+zy+z^2=xy+(x+y+z)z$，由 $xyz(x+y+z)=1$ 可得 $z(x+y+z)=\frac{1}{xy}$，所以 $S=xy+\frac{1}{xy}\geqslant2\sqrt{xy\cdot\frac{1}{xy}}=2$，当且仅当 $xy=1$ 时，等号成立，所以A正确，D错误；当 S 取最小值时，$xy=1$，$xyz(x+y+z)=z(x+y+z)=z^2+(x+y)z=1$，所以 $z^2+(x+y)z-1=0$，$z=\frac{-(x+y)\pm\sqrt{(x+y)^2+4}}{2}$，又 $z>0$，所以 $z=\frac{\sqrt{(x+y)^2+4}-(x+y)}{2}=\frac{2}{\sqrt{(x+y)^2+4}+(x+y)}$，又 $x+y\geqslant2\sqrt{xy}=2$，当且仅当 $x=y=1$ 时等号成立，记 $t=x+y$，则 $t\geqslant2$，所以 $z=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}+t}$，函数 z 在 $t\in[2,+\infty)$ 时单调递减，所以当 $t=2$ 时，z 取得最大值，且 $z_{\max}=\frac{2}{\sqrt{2^2+4}+2}=\sqrt{2}-1$，$z$ 无最小值，所以C正确，B错误.

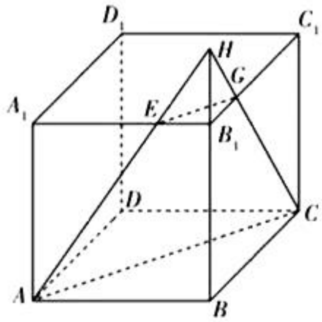
12. **答案** BCD

命题意图 本题考查立体几何中点、线、面的位置关系及点的轨迹的判断.

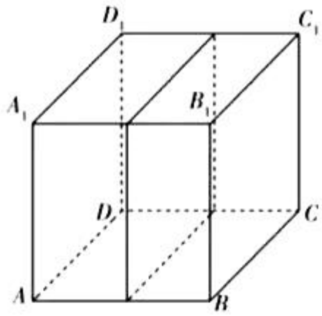
解析 对于A，如图，在正方体中，易知 $A_1B\perp DB_1$，若存在点 E，使 $AE\perp DB_1$，由于 AE 与 A_1B 相交，所以 $DB_1\perp$ 平面 AA_1B_1B，显然不成立，故A错误.



对于B，当$\frac{A_1E}{EB_1}=\sqrt{3}$时，如图，记经过点$A,C,E$的平面与$B_1C_1$交于点$G$，连接$CG,EG$，则$EB_1=GB_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 由于平面$ABCD$∥平面$A_1B_1C_1D_1$，平面$ACE\cap$平面$ABCD=AC$，平面$ACE\cap$平面$A_1B_1C_1D_1=EG$，所以$EG\parallel AC$. 记$BB_1\cap CG=H$，则$\frac{HB_1}{HB}=\frac{GB_1}{BC}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 记$BB_1\cap AE=H_1$，则$\frac{H_1B_1}{H_1B}=\frac{EB_1}{AB}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，所以点$H$与$H_1$重合. 又平面$ABC$∥平面$EB_1G$，所以几何体$ABC-EB_1G$是棱台，$V_{ABC-EB_1G}=\frac{1}{3}\cdot BB_1(S_{\triangle ABC}+\sqrt{S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle EB_1G}}+S_{\triangle EB_1G})=\frac{1}{4}$，其余部分的体积为$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，所以经过点$A,C,E$的平面将正方体分成体积比为3∶1的大小两部分，故B正确.

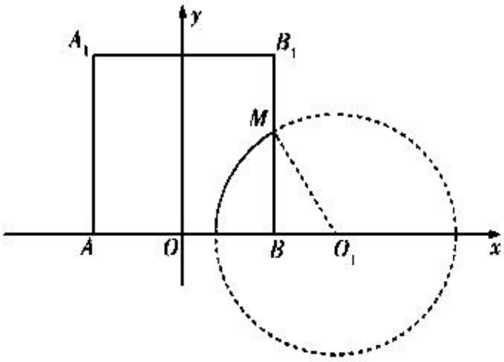


对于C，当$FA=FB$时，点F的轨迹是以棱AB,A_1B_1,C_1D_1,CD的中点为顶点的正方形，如图所示，轨迹的长度为4，故C正确.

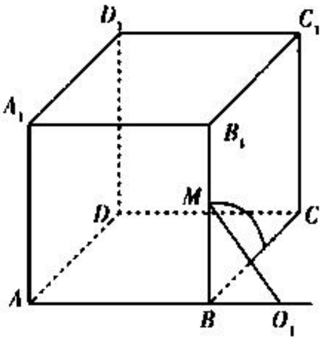


对于D，先看点F在侧面ABB_1A_1内的轨迹，以AB的中点O为坐标原点，AB所在直线为x轴建立平面直角坐标系，如图. 设$F(x,y)$，由$FA=2FB$可得点F的轨迹方程为$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$，其是以$O_1\left(\frac{5}{6},0\right)$为圆心，$\frac{2}{3}$为半径的圆，记该圆与$BB_1$交于点$M$，则$\angle BO_1M=\frac{\pi}{3}$，点$F$在侧面$ABB_1A_1$内的轨迹为一段圆弧，长度为$\frac{2\pi}{9}$.

同理点 F 在底面 $ABCD$ 内的轨迹的长度也为$\frac{2\pi}{9}$.



当点 F 在侧面 BCC_1B_1 内时,其轨迹可视为以 O_1 为球心,$\frac{2}{3}$为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线,由于 $BO_1=\frac{1}{3}$,$O_1M=\frac{2}{3}$,所以 $BM=\frac{\sqrt{3}}{3}$,点 F 在侧面 BCC_1B_1 内的轨迹是以 B 为圆心,$\frac{\sqrt{3}}{3}$为半径的圆的$\frac{1}{4}$,长为$\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$. 分析易知,其余面上的点均不满足题意. 所以点 F 的轨迹长度为$\frac{(8+3\sqrt{3})\pi}{18}$,故 D 正确.



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $\sqrt{6}$

命题意图 本题考查空间向量的应用.

解析 由题可知$\overrightarrow{AB}=(2,0,2)$,$\overrightarrow{PB}=(2,-2,0)$,则点 P 到直线 l 的距离为 $d=\sqrt{\overrightarrow{PB}^2-\left(\overrightarrow{PB}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}=\sqrt{6}$.

14. **答案** -1

命题意图 本题考查数学文化.

解析 由题意得$\frac{1}{2x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}=\frac{1}{2x^2+1}-\frac{4}{2x^2+2}$,则$\left(\frac{1}{2x^2+1}-\frac{4}{2x^2+2}\right)[(2x^2+1)-(2x^2+2)]\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot\sqrt{2x^2+1}-\frac{2}{\sqrt{2x^2+2}}\cdot\sqrt{2x^2+2}\right)^2=1$,当且仅当$\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot\sqrt{2x^2+2}=\frac{2}{\sqrt{2x^2+2}}\cdot\sqrt{2x^2+1}$,即 $x=0$ 时,等号成立,所以$\frac{1}{2x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}=\frac{1}{2x^2+1}-\frac{4}{2x^2+2}\geqslant-1$,最小值为 -1,此时 $x=0$.

另解:记 $f(x)=\frac{1}{2x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}$,$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$f'(x)=$

$\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2x^2+1}\right)\frac{4x^3}{(x^2+1)(2x^2+1)}\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=-1$.

15. **答案** $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

命题意图 本题考查椭圆的离心率的计算.

解析 不妨设直线 $BA: y=kx+1(k>0)$，则直线 $BC: y=-\frac{1}{k}x+1$. 联立方程得 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{a^2}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(1+a^2k^2)x^2+2a^2kx=0$，$\therefore x_A=-\frac{2a^2k}{1+a^2k^2}$. 用 $-\frac{1}{k}$ 代替 k 得 $x_C=\frac{2a^2k}{a^2+k^2}$，$\therefore |BA|=\sqrt{1+k^2}\,|x_A|=\frac{2a^2k\sqrt{1+k^2}}{1+a^2k^2}$，$|BC|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|x_C|=\frac{2a^2\sqrt{1+k^2}}{a^2+k^2}$. 由 $|BA|=|BC|$，得 $(k-1)[k^2+(1-a^2)k+1]=0$，该方程关于 k 已有一解 $k=1$，由于符合条件的 $\triangle ABC$ 有且仅有一个，$\therefore$ 关于 k 的方程 $k^2+(1-a^2)k+1=0$ 无实数解或有两个相等的实数解 $k=1$. 无实数解时，$\Delta=(1-a^2)^2-4<0$，所以 $1<a<\sqrt{3}$；有两个相等的实数解 $k=1$ 时，$\Delta=0$，$a=\sqrt{3}$. $\therefore 1<a\leqslant\sqrt{3}$，则该椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

16. **答案** $\frac{13}{18}$

命题意图 本题考查数列与概率的综合.

解析 记学生甲上到第 n 级台阶共有 a_n 种上法，则 $a_1=1$，$a_2=2$，当 $n\geqslant 3$ 时，学生甲上到第 n 级台阶，可以从第 $n-1$ 级或第 $n-2$ 级上去，所以 $a_{n-2}+a_{n-1}=a_n$，于是 $a_3=3$，$a_4=5$，$a_5=8$，$a_6=13$，$a_7=21$，$a_8=34$，$a_9=55$，$a_{10}=89$，$a_{11}=144$，所以甲踩过第 5 级台阶的概率是 $P=\frac{a_5a_6}{a_{11}}=\frac{13}{18}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查线线垂直的证明及空间向量的应用.

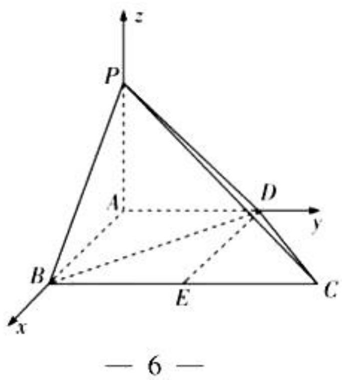
解析 (Ⅰ) 如图，连接 DE，$\because BD=DC=2\sqrt{2}$，$BC=4$，E 为棱 BC 的中点，

$\therefore DE\perp BC$，且 $DE=2$，

又 $AD/\!/BE$，$AD=BE=DE=2$，$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是正方形，…………（2 分）

$\therefore AD\perp AB$，又 $\because AD\perp PA$，$PA\cap AB=A$，$\therefore AD\perp$ 平面 PAB，

又 $PB\subset$ 平面 PAB，$\therefore AD\perp PB$. …………（4 分）



— 6 —

(Ⅱ)$\because PA\perp AD, PB=PD=2\sqrt{2}, AD=AB=2$,

$\therefore PA=2$.

又 $PA^2+AB^2=PB^2$,

$\therefore PA\perp AB$,

又 $PA\perp AD, AD\cap AB=A$,

$\therefore PA\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………………………………………………(6 分)

以 A 为坐标原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $B(2,0,0),C(2,4,0),D(0,2,0),P(0,0,2)$,

$\therefore \overrightarrow{PB}=(2,0,-2),\overrightarrow{PC}=(2,4,-2),\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+4y-2z=0,\\ 2y-2z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$. ………………………………(8 分)

设 PB 与平面 PCD 所成的角为 $\theta\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{PB}\rangle|=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………………(10 分)

18. **命题意图** 本题考查三角恒等变换及正弦定理的应用.

解析 (Ⅰ)由 $2\cos A\cos C=\frac{\tan B}{\tan A+\tan C}$,得

$2\cos A\cos C\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin C}{\cos C}\right)=\frac{\sin B}{\cos B}$,

$2\sin A\cos C+2\cos A\sin C=\frac{\sin B}{\cos B}$,

$2\sin(A+C)=2\sin B=\frac{\sin B}{\cos B}$. ……………………………………………………………(3 分)

又 $\sin B>0$,

$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………(4 分)

$\because B\in(0,\pi)$ 且 $B\neq\frac{\pi}{2}$,

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore a=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A, c=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin C$. ……………………………………………………(7 分)

$\because \triangle ABC$ 是钝角三角形,不妨设 A 为钝角,则 $A\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.

$a+c=\frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]=4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$, ……（9 分）

$\because A\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore \sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，……（11 分）

$\therefore a+c$ 的取值范围是$(2,2\sqrt{3})$. ……（12 分）

19. **命题意图** 本题考查线性回归及随机变量的分布列与数学期望.

解析 （Ⅰ）由题意得，$\sum_{i=1}^{9}x_i=333$，$\bar{x}=\frac{333}{9}=37$，$\sum_{i=1}^{9}y_i=720$，$\bar{y}=80$，

$9\bar{x}\cdot\bar{y}=26\ 640$，$\sum_{i=1}^{9}x_iy_i=26\ 340$，

所以$\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{9}x_iy_i-9\bar{x}\cdot\bar{y}=26\ 340-26\ 640=-300$，……（2 分）

又$\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2=540$，……（3 分）

所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{-300}{540}=-\frac{5}{9}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=80+\frac{5}{9}\times 37=\frac{905}{9}$，

故 y 关于 x 的回归直线方程为$\hat{y}=-\frac{5}{9}x+\frac{905}{9}$. ……（5 分）

当 $x=55$ 时，$\hat{y}=70$，即预测长度区间为$[54,56]$的 150 个螺丝钉中的优质个数为 70. ……（6 分）

（Ⅱ）根据题意，在$[24,26]$，$[33,35]$，$[39,41]$，$[45,47]$，$[48,50]$这五个长度区间中，$[24,26]$，$[33,35]$，$[39,41]$这三个长度区间中超过半数是优质的，在$[45,47]$，$[48,50]$这两个长度区间中优质的不足一半，故随机抽取得到的 5 个螺丝钉中有 3 个是优质的.

所以 X 的所有可能取值为 1，2，3，……（8 分）

则$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，……（10 分）

故随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$. ……（12 分）

20. **命题意图** 本题考查数列的单调性、等比数列的定义及数列前 n 项和的计算.

解析 （Ⅰ）$a_{n+1}=a_n^2+a_n=a_n(a_n+1)$，$\because a_1=\frac{1}{3}>0$，$\therefore a_n>0$，

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$，

$\therefore \dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$,

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{2023}\dfrac{1}{a_i+1}=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{2024}}=3-\dfrac{1}{a_{2024}}$. ……………………（2 分）

又 $a_{n+1}-a_n=a_n^2>0$，$\therefore \{a_n\}$是递增数列，

$\because a_1=\dfrac{1}{3},a_2=\dfrac{4}{9},a_3=\dfrac{52}{81},a_4=\dfrac{6\,916}{6\,561}>1$,

$\therefore$ 当 $n\geqslant 4$ 时，$a_n>1$. ……………………（4 分）

$\therefore a_{2024}>1,3-\dfrac{1}{a_{2024}}\in(2,3)$，$\therefore b_1=\left[\sum\limits_{i=1}^{2023}\dfrac{1}{a_i+1}\right]=2$. ……………………（6 分）

（Ⅱ）$\because b_{n+1}^2=b_nb_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，$b_1=2,b_2=32$，

$\therefore b_n>0$，则有$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore \{b_n\}$是以 $b_1=2$ 为首项，$q=\dfrac{b_2}{b_1}=16$ 为公比的等比数列，……………………（8 分）

$\therefore b_n=2\cdot 16^{n-1}=2^{4n-3}(n\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore c_n=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 b_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

$\because c_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}=\dfrac{2}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n-3}}>\dfrac{2}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3}}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})$，……………（10 分）

$\therefore T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n>\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{1}+\sqrt{9}-\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{4n+1}-1)$

$=\dfrac{\sqrt{4n+1}}{2}-\dfrac{1}{2}$

$>\dfrac{\sqrt{4n+1}}{2}-1$，

$\therefore$ 原不等式得证. ……………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查双曲线的方程及直线与双曲线的位置关系.

解析 （Ⅰ）设双曲线 C 的半焦距为 $c(c>0)$.

由题意可得，$\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=2, \\ \dfrac{16}{a^2}-\dfrac{36}{b^2}=1, \\ c^2=a^2+b^2, \end{cases}$

解得 $a=2,b=2\sqrt{3},c=4$，……………………（3 分）

所以 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$. ……………………（4 分）

（Ⅱ）$\left|\dfrac{1}{|AF_2|}-\dfrac{1}{|BF_2|}\right|$为定值，理由如下：

由(Ⅰ)知 $F_2(4,0)$，设直线 $l: x=my+4$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立方程得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1,\\ x=my+4,\end{cases}$ 消去 x，整理可得 $(3m^2-1)y^2+24my+36=0$，

$\therefore \begin{cases}3m^2-1\neq 0,\\ \Delta=144(m^2+1)>0,\\ y_1+y_2=-\dfrac{24m}{3m^2-1},\\ y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2-1}.\end{cases}$ ……（6分）

$\because |AF_2|^2=(x_1-4)^2+y_1^2=(m^2+1)y_1^2$，

$\therefore |AF_2|=\sqrt{m^2+1}\,|y_1|$，同理 $|BF_2|=\sqrt{m^2+1}\,|y_2|$. ……（8分）

$\because$ 直线 l 过点 F_2 且与 C 的左、右两支分别交于 A,B 两点，

$\therefore A,B$ 两点在 x 轴同侧，

$\therefore y_1y_2>0$，此时 $3m^2-1>0$，即 $m^2>\dfrac{1}{3}$.

$$\therefore \left|\frac{1}{|AF_2|}-\frac{1}{|BF_2|}\right|^2=\frac{1}{|AF_2|^2}+\frac{1}{|BF_2|^2}-\frac{2}{|AF_2|\cdot|BF_2|}$$ ……（10分）

$$=\frac{1}{(m^2+1)y_1^2}+\frac{1}{(m^2+1)y_2^2}-\frac{2}{(m^2+1)|y_1y_2|}$$

$$=\frac{1}{(m^2+1)y_1^2}+\frac{1}{(m^2+1)y_2^2}-\frac{2}{(m^2+1)y_1y_2}$$

$$=\frac{1}{m^2+1}\cdot\left(\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}-\frac{2}{y_1y_2}\right)$$

$$=\frac{1}{m^2+1}\cdot\frac{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}{(y_1y_2)^2}$$

$$=\frac{1}{m^2+1}\cdot\frac{m^2+1}{9}=\frac{1}{9},$$

$\therefore \left|\dfrac{1}{|AF_2|}-\dfrac{1}{|BF_2|}\right|=\dfrac{1}{3}$，为定值. ……（12分）

22. **命题意图** 本题考查导数的综合应用.

解析 (Ⅰ)由题可知 $f'(x)=2e^x-2x+a$，

记 $g(x)=2e^x-2x+a$，则 $g'(x)=2e^x-2$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>f'(0)=2+a$. ……（1分）

(ⅰ)当 $a\geqslant -2$ 时，$f'(x)>f'(0)=2+a\geqslant 0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)>f(0)=0$，$\therefore a\geqslant -2$ 成立； ……（2分）

(ⅱ)当 $a<-2$ 时，$f'(0)=2+a<0$，

$f'(x)=2e^x-2x+a=e^x-2x+e^x+a$,

记 $h(x)=e^x-2x, x\in(0,+\infty)$,则 $h'(x)=e^x-2$,令 $h'(x)=0$,得 $x=\ln 2$,

当 $x>\ln 2$ 时,$h'(x)>0$,当 $0<x<\ln 2$ 时,$h'(x)<0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减,在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore h(x)_{\min}=h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$,则 $h(x)>0$.

令 $x=\ln(-a)>\ln 2>0$,则 $f'(\ln(-a))=e^{\ln(-a)}-2\ln(-a)>0$,

$\therefore$ 存在 $x_0\in(0,\ln(-a))$,使得 $f'(x_0)=2e^{x_0}-2x_0+a=0$,则 $a=-2e^{x_0}+2x_0$, ……………………………(4 分)

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=2e^{x_0}-x_0^2+ax_0-2=2(1-x_0)e^{x_0}+x_0^2-2$.

记 $\varphi(x)=2(1-x)e^x+x^2-2$,

则当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$\varphi'(x)=2x(1-e^x)<0$,

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

$\therefore \varphi(x)<\varphi(0)=0$,则有 $f(x_0)<0$,与 $f(x)>0$ 恒成立矛盾,所以 $a<-2$ 不成立.

综上,实数 a 的取值范围是 $[-2,+\infty)$. ……………………………………………………………………(6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,当 $a=-2$ 时,$\forall x\in(0,+\infty)$,$f(x)=2e^x-x^2-2x-2>0$,

$\therefore e^x-x>\frac{1}{2}x^2+1$.

记 $m(x)=x-1-\ln x$,

则当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$m'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$,

$\therefore m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,则有 $m(x)>m(1)=0$,

$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$x>1+\ln x$,

$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$e^x-x>\frac{1}{2}x^2+1>\frac{x(1+\ln x)}{2}+1$. ……………………………………………(8 分)

令 $x=e^k(k\in\mathbf{N}^*)$,则 $e^{e^k}-e^k>\frac{e^k(1+k)}{2}+1$.

记 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}e^k(1+k)\ (n\in\mathbf{N}^*)$,

则 $T_n=2e+3e^2+4e^3+\cdots+(n+1)e^n$,$eT_n=2e^2+3e^3+4e^4+\cdots+(n+1)e^{n+1}$,

$\therefore (e-1)T_n=(n+1)e^{n+1}-(e^2+e^3+\cdots+e^n)-2e=(n+1)e^{n+1}-\frac{e^2(1-e^{n-1})}{1-e}-2e$,

$\therefore T_n=\frac{(n+1)e^{n+1}-2e}{e-1}+\frac{e^2-e^{n+1}}{(e-1)^2}$, ……………………………………………………(10 分)

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}(e^{e^k}-e^k)>\frac{1}{2}T_n+n=\frac{(n+1)e^{n+1}-2e}{2(e-1)}+\frac{e^2-e^{n+1}}{2(e-1)^2}+n$,

$\therefore$ 对任意正整数 n,都有不等式 $\sum\limits_{k=1}^{n}(e^{e^k}-e^k)>\frac{(n+1)e^{n+1}-2e}{2(e-1)}+\frac{e^2-e^{n+1}}{2(e-1)^2}+n$ 成立. ………………(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。