

炎德·英才·名校联考联合体 2024 届高三第三次联考 数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	B	C	B	D	A	C	AC	ACD	BCD	ABD

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.)

1. B 【解析】因为 $U = \{x \in \mathbb{Z} | (x+4)(x-3) < 0\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, 又 $A = \{0, 1, 2\}$, 所以 $\complement_U A = \{-3, -2, -1\}$, 故选 B.

2. A 【解析】由已知 $z = \frac{-2+i}{i} = \frac{2i+i}{i} = 1+2i$, 故选 A.

3. B 【解析】从散点图中可知, 删除点 B 后, 样本数据的两变量 x, y 负相关, 所以 A 错误; 由于 B 点较其他点偏离程度大, 故去掉 B 点后, 回归效果更好, 从而相关系数 r 的绝对值更接近于 1, 所以 B 正确; 同理决定系数 R^2 越接近于 1, 所以新样本的残差平方和变小, 所以 C 错误; 从而解释变量 x 与响应变量 y 相关性增强, 所以 D 错误. 故选 B.

4. C 【解析】函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得 $y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $g\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

5. B 【解析】设事件 A 为“甲猜对”, B 为“乙猜对”, C 为“‘几何队’至少猜对一个成语”,

所以 $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{5}, P(C) = \frac{1}{4}$,

则 $C = A \cup B$, 由事件的独立性与互斥性,

得 $P(C) = P(\bar{A}B) + P(AB) = P(\bar{A})P(B) + P(A)P(B)$

$= \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{19}{20}$, 故选 B.

另解: $P(C) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{19}{20}$.

6. D 【解析】因为 $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x, x \in \mathbb{R}$.

所以 $f'(x) = (x^2 + x)e^x = x(x+1)e^x$.

当 $x > 0$ 或 $x < -1$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, $f(x)_{\min} = f(0) = e^0 = 1$. 故选 D.

7. A 【解析】若 $\overrightarrow{AM} = 2M\overrightarrow{C}$, 由向量的线性运算法则,

可得 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

因为 $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{BC}$, 所以 $\lambda = \frac{1}{3}, \mu = \frac{2}{3}$, 所以 $\mu - \lambda = \frac{1}{3}$, 所以 P 是 Q 的充分条件;

若 $\mu - \lambda = \frac{1}{3}$, 得 $\mu = \lambda + \frac{1}{3}$, 代入 $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{BC}$, 得 $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BA} + \left(\lambda + \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}$,

所以 $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = -\lambda\overrightarrow{AB} + \left(\lambda + \frac{1}{3}\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$, 得 $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{2}{3} - 2\lambda\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{3} + \lambda\right)\overrightarrow{AC}$.

当 $\lambda \neq \frac{1}{3}$ 时, $\frac{2}{3} - 2\lambda \neq 0$, 此时 $AM = 2MC$ 不成立, 所以 P 不是 Q 的必要条件. 故选 A.

8. C 【解析】由题可知 $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}, a_3 = 2^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}, a_4 = 2^3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$,

由此可知 $a_n = 2^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, 所以 $b_n = n^2 a_n = \frac{1}{2} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

因为 $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2} (n+1)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[(n+1)^2 - n^2 \right] = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^n (-n^2 + 4n + 2)$,

令 $-n^2 + 4n + 2 = 0$, 解得 $n_1 = 2 + \sqrt{6}, n_2 = 2 - \sqrt{6}$ (舍),

由此可知 $n \leq 4$ 时 $b_{n+1} - b_n > 0$; $n \geq 5$ 时 $b_{n+1} - b_n < 0$. 故 b_5 的取值最大. 故选 C.

二、选择题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

9. AC 【解析】选项 A 正确; 当 $c=0$ 时, $a|c| = b|c|$, 故选项 B 错误;

因为 $a > b > 0$, 所以 $\frac{b+c^2}{a+c^2} - \frac{b}{a} = \frac{(a-b)c^2}{a(a+c^2)} \geq 0$, 所以 $\frac{b}{a} \leq \frac{b+c^2}{a+c^2}$, 故选项 C 正确;

因为 $a < b < 0$, 所以 $|a| > |b| > 0$, 所以 $a^2 > b^2$, 故选项 D 错误.

故选 AC.

10. ACD 【解析】 $(1+x)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^r (r=0, 1, 2, \dots, 6)$, 所以 $a_0 = -2 \times C_6^0 = -2$, 故选项 A 正确;
又 $T_1 = 20x^1, T_3 = 15x^2$, 从而 $(3x-2)(1+x)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为 $3 \times 15 + (-2) \times 20 = 5$, 故选项 B 错误;
令 $x=1$, 得 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_7 = (3 \times 1 - 2) \cdot (1+1)^6 = 64$,
令 $x=-1$, 得 $a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_7 = 0$,
两式相减得 $2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 64$, 所以 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 32$, 故选项 C 正确;
令 $x=2$ 得 $a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 + \dots + 2^7 a_7 = (3 \times 2 - 2) \cdot (1+2)^6 = 2916$, 故选项 D 正确; 故选 ACD.

11. BCD 【解析】显然选项 A 错误;

设平面向量 a, b 的夹角为 θ , 因为 $a \perp (a-b)$, 所以 $a \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b = 2^2 - 2 \times 4 \cos \theta = 0$,

所以 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, 又 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 故选项 B 正确;

因为 $|a-b| = \sqrt{(a-b) \cdot (a-b)} = \sqrt{a^2 - 2a \cdot b + b^2} = 2\sqrt{3}$, 故选项 C 正确;

设 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$, 由已知 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}, OA \perp AB$,

因为 $|c-b| = \sqrt{3}$, 所以 $|\vec{BC}| = \sqrt{3}$, 可知点 C 在以点 B 为圆心, $\sqrt{3}$ 为半径的圆上,

所以 $|c-a| = |\vec{AC}| \in [\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$, 故选项 D 正确. 故选 BCD.

12. ABD 【解析】因为 $f(2x+1)$ 是偶函数, 所以 $f(-2x+1) = f(2x+1)$, 则 $f(-x+1) = f(x+1)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 由 $f(-2x+1) = f(2x+1)$ 两边求导得 $-2f'(-2x+1) = 2f'(2x+1)$, 所以 $f'(2x+1) = -f'(-2x+1)$, 得 $f'(x) = -f'(2-x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 故选项 A 正确;

令 $x=1$ 得 $f'(1) = -f'(1)$, 所以 $f'(1) = 0$, 因为函数 $f'(x+2)$ 为偶函数, 所以 $f'(x+2) = f'(-x+2)$,

所以 $f'(x) = f'(4-x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称,

所以函数 $f'(x)$ 的周期为 $T = 2 \times |2-1| = 4$, 所以选项 B 正确;

又因为 $f'(4-x) = -f'(2+x)$, 所以函数 $f'(x)$ 的图象关于点 $(3, 0)$ 对称, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称, 所以选项 C 错误;

因为 $f'(x) = f'(4-x)$, 所以 $f'(1) = f'(3) = 0$, 又因为 $f'(x) = -f'(2-x)$, 所以 $f'(0) + f'(2) = 0$,

所以 $\sum_{i=1}^{2017} f'(i) = f'(1) + f'(2) + f'(3) = 8$, 所以选项 D 正确. 故选 ABD.

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. $\frac{\pi}{6}$ 【解析】由题意得 $2 \sin a \cos a = \sqrt{3} \sin a$, $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\sin a > 0$, 所以 $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $a =$

14. 8 【解析】因为 $2a+b-ab=0$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. 因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $2a+b = (2a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) \geq 2 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 2 \geq 4 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} = 8$. 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 即 $a=2, b=4$ 时等号成立. 所以 $2a+b$ 的最小值为 8.

15. 312 【解析】门卡标有偶数数字包含 2, 4, 6, 奇数数字包含 1, 3, 5, 7. 若四位游客都没有拿到偶数数字门卡共有 $A_4^4 = 24$ 种; 若四位游客中一个拿到偶数数字门卡, 三个拿到奇数数字门卡, 有 $C_3^1 C_4^3 = 288$ 种. 故共有 $24 + 288 = 312$ 种.

16. $a < 3b$ 【解析】因为 $3^a = 27^b + \log_3 \frac{b}{a}$, 所以 $3^a + \log_3 a = 3^{3b} + \log_3 3b - 1 < 3^{3b} + \log_3 3b$,

设 $f(x) = 3^x + \log_3 x (x > 0)$, 又因为 $y = 3^x$ 与 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) = 3^x + \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 因为 $f(a) < f(3b)$, 所以 $a < 3b$.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 【解析】(1) 因为 $\sin A - 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \sqrt{2} - 1$, 所以 $\sin A - (1 - \cos A) = \sqrt{2} - 1$,

即 $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{2} \sin \left(A + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$, 即 $\sin \left(A + \frac{\pi}{4} \right) = 1$, 3 分

又 $0 < A < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{4} < A + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$, 所以 $A + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 得 $A = \frac{\pi}{4}$ 5 分

(2) 由题意 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3c \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} c = 6$, 所以 $c = 4\sqrt{2}$, 7 分

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 3^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 17$,

所以 $a = \sqrt{17}$ 10 分

18.【解析】(1) 2×2 列联表补充如下:

	选物理类	选历史类	合计
男生	35	15	50
女生	25	25	50
合计	60	40	100

零假设为 H_0 : 选科分类与性别无关联.

因为 $\chi^2 = \frac{100 \times (35 \times 25 - 25 \times 15)^2}{60 \times 40 \times 50 \times 50} = \frac{25}{6} \approx 4.167 > 3.841 = \chi_{0.05}^2$, 4分

根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立,

即认为选科分类与性别有关联, 此推断犯错误的概率不大于 0.05. 5分

(2) 由已知, 50 名女学生中选择物理类和选择历史类的比例为 1:1,

因此抽取 6 名女生中, 选择物理类和选择历史类的人数均为 3 名.

所以随机变量 X 的取值为 1, 2, 3. 7分

$P(X=1) = \frac{C_3^3 C_3^3}{C_6^6} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, P(X=2) = \frac{C_3^2 C_3^4}{C_6^6} = \frac{3}{5}, P(X=3) = \frac{C_3^1 C_5^5}{C_6^6} = \frac{1}{5}$, 10分

所以随机变量 X 的分布列如下表:

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

..... 11分

所以 $E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2$ 12分

19.【解析】(1) 由已知当 $n \leq 1$ 时, $a_n = S_1 = 1$, 1分

由已知 $S_n = n^2 (n \in \mathbb{N}^+)$, 当 $n \geq 2$ 时 $S_{n-1} = (n-1)^2$,

两式相减得 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1 (n \geq 2)$, 3分

又当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$, 满足 $a_n = 2n-1$.

所以 $a_n = 2n-1 (n \in \mathbb{N}^+)$ 4分

(2) 由已知 $b_n \neq 0$, 且 $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+)$, 得 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+)$,

又 $b_1 = 2, b_2 = 4$, 所以 $\frac{b_2}{b_1} = 2$, 所以 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = 2 (n \geq 2)$, 7分

所以数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且首项为 2, 公比为 2,

所以 $b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 8分

因为 $c_n = a_n + (-1)^n b_n = 2n-1 + (-1)^n 2^n = 2n-1 + (-2)^n$,

所以 $T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = [1+3+5+\dots+(2n-1)] + [(-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + \dots + (-2)^n]$

$= \frac{(1+2n-1)n}{2} + \frac{-2[1-(-2)^n]}{1-(-2)} = n^2 - \frac{1}{3}(-2)^{n+1} - \frac{2}{3}$ 12分

20.【解析】(1) 由已知 $\angle ABC = 120^\circ, AB = BC = 2$, 得 $\angle BAC = \angle BCA = 30^\circ$.

所以 $AC = 2AB \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ 2分

在 $\triangle ACD$ 中, 因为 $BC \perp CD, \angle BCA = 30^\circ$, 所以 $\angle ACD = 60^\circ$, 又 $AD = 6$ 3分

由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$, 得 $\sin \angle ADC = \frac{AC \sin \angle ACD}{AD} = \frac{2\sqrt{3} \sin 60^\circ}{6} = \frac{1}{2}$,

又 $0^\circ < \angle ADC < 60^\circ$, 所以 $\angle ADC = 30^\circ$ 5分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由已知 $AB = BC = 2, \angle ABC = \theta, 120^\circ \leq \theta < 180^\circ$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \theta = 2 \sin \theta$ 6分

由余弦定理 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \cos \theta$

$= 8 - 8 \cos \theta$ 7分

在 $\triangle ACD$ 中, 因为 $\angle ACD = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \frac{180^\circ - \theta}{2} = \frac{\theta}{2}$,

又 $2CD \cdot \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{3}AC$, 所以 $CD = \frac{\sqrt{3}AC}{2\sin \frac{\theta}{2}}$, 8分

所以 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot CD \cdot \sin \angle ACD = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{\sqrt{3}AC}{2\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{4}AC^2 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cos \theta$, 10分

所以四边形 $ABCD$ 的面积 $S(\theta) = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = 2\sin \theta + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cos \theta = 2\sqrt{3} + 4\sin(\theta - 60^\circ)$, 11分
 因为 $120^\circ \leq \theta < 180^\circ$, 所以 $60^\circ \leq \theta - 60^\circ < 120^\circ$, 当 $\theta - 60^\circ = 90^\circ$, 即 $\theta = 150^\circ$ 时, $S(\theta)_{\max} = 2\sqrt{3} + 4$.

故四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3} + 4$ 12分

21. 【解析】(1) 设 A_1 : 第一次去 A 滑雪场, A_2 : 第二次去 A 滑雪场, B_1 : 第一次去 B 滑雪场, B_2 : 第二次去 B 滑雪场,
 所以 $P(A_1) = 0.4, P(B_1) = 0.6$, 1分

$P(A_2|A_1) = 0.6, P(A_2|B_1) = 0.5$, 2分

所以 $P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1)$ 3分

$= 0.4 \times 0.6 + 0.6 \times 0.5 = 0.54$, 5分

(2) 由已知 $X = 4.5$ 或 $X = 3.6$, 6分

因为第一场比赛由“飞雪”队的乙与甲进行,

所以“飞雪”队获胜的概率为 $P_1 = \frac{1}{3} \times p + \frac{2}{3} \times p \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}p$, 7分

甲获胜的概率为 $P_2 = \frac{2}{3} \times (1-p) + \frac{1}{3} \times (1-p) \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9} - \frac{8}{9}p$, 8分

所以非平局的概率为 $P(X=4.5) = P_1 + P_2 = \frac{8}{9} - \frac{1}{3}p$, 9分

平局的概率为 $P(X=3.6) = P_1 - P_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}p$, 10分

随机变量 X 的分布列为:

X	4.5	3.6
P	$\frac{8}{9} - \frac{1}{3}p$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{3}p$

随机变量 X 的数学期望为 $E(X) = 4.5 \times (\frac{8}{9} - \frac{1}{3}p) + 3.6 \times (\frac{1}{9} + \frac{1}{3}p) = 4.4 - 0.3p$ (万元),

又 $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$, 所以 $E(X)$ 的取值范围为 $(4.25, 4.3)$ (单位: 万元), 12分

22. 【解析】(1) 由已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

由 $f(x) = 2\ln x - ax + 1 = 0$, 得 $a = \frac{2\ln x + 1}{x}$,

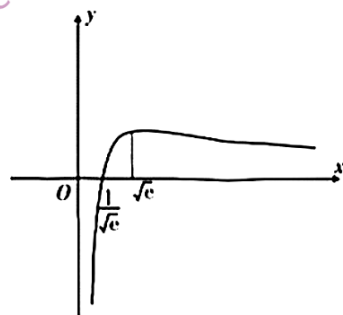
令函数 $u(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x}, u'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^2}$, 1分

当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时, $u'(x) > 0$, 函数 $u(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增, 当 $x > \sqrt{e}$ 时, $u'(x) < 0$, 函数 $u(x)$ 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 单调递减,

所以 $u(x)_{\max} = u(\sqrt{e}) = \frac{2}{\sqrt{e}} = \frac{2\sqrt{e}}{e}$, 2分

因为 $u(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2\ln x}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\ln x}{x} = 0$, 3分

可知函数 $u(x)$ 的图象如下所示:





所以当 $a > \frac{2\sqrt{e}}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点个数为 0 个, 当 $a \leq 0$ 或 $a = \frac{2\sqrt{e}}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点个数为 1 个,
当 $0 < a < \frac{2\sqrt{e}}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点个数为 2 个. 5 分

(2) 由题设方程 $f(x) = g(x)$, 即 $2\ln x - ax + 1 = e^x - ex^2$,
所以 $ax + e^x = 2\ln x + ex^2 + 1 = \ln ex^2 + e^{\ln ex^2}$,
令 $\varphi(x) = ax + e^x$, $\psi(x) = \ln ex^2$, 6 分

又 $\varphi'(x) = a + e^x > 0$ 在 \mathbb{R} 上恒成立, 所以 $\varphi(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 所以 $ax = \ln ex^2$, 即 $ax = 1 + 2\ln x$,
由已知, 方程 $ax = 1 + 2\ln x$ 有两个实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,
即 $a = \frac{1+2\ln x}{x}$ 有两个实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 由(1)得 $\frac{1}{\sqrt{e}} < a < \frac{2}{\sqrt{e}} < x_2$ 7 分

令 $\frac{1}{x_1} = t_1, \frac{1}{x_2} = t_2 (0 < t_2 < \frac{1}{\sqrt{e}} < t_1 < \sqrt{e})$, 所以 $\begin{cases} t_1 - 2\ln t_1, \\ t_2 - 2\ln t_2, \end{cases}$
令 $h(t) = t - 2\ln t (t > 0)$, 所以 $h(t) = a$ 有两个实根 t_1, t_2 8 分
先证 $t_1 + t_2 > \frac{2}{\sqrt{e}}$.

因为 $h'(t) = 1 - \frac{2}{t}$, 令 $h'(t) > 0$, 解得 $0 < t < \frac{1}{\sqrt{e}}$, 令 $h'(t) < 0$, 解得 $t > \frac{1}{\sqrt{e}}$.
所以 $h(t)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ 上单调递减. 要证 $t_1 + t_2 > \frac{2}{\sqrt{e}}$, 即证 $t_1 > \frac{2}{\sqrt{e}} - t_2$.

因为 $t_1 > \frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}} - t_2 > \frac{1}{\sqrt{e}}$, $h(t)$ 在 $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ 上单调递减, 只需证 $h(t_1) < h(\frac{2}{\sqrt{e}} - t_2)$,
即证 $h(t_1) < h(\frac{2}{\sqrt{e}} - t_2)$ 9 分

令 $F(t) = h(t) - h(\frac{2}{\sqrt{e}} - t) (0 < t < \frac{1}{\sqrt{e}})$,
 $F'(t) = h'(t) + h'(\frac{2}{\sqrt{e}} - t) = 1 - \frac{2}{t} - 1 - 2\ln(\frac{2}{\sqrt{e}} - t) = -2 - 2\ln[\frac{1}{\sqrt{e}}(\frac{2}{\sqrt{e}} - t)]$
因为 $t(\frac{2}{\sqrt{e}} - t) = -t^2 + \frac{2t}{\sqrt{e}} (0 < t < \frac{1}{\sqrt{e}})$, 令 $k(t) = -t^2 + \frac{2t}{\sqrt{e}} (0 < t < \frac{1}{\sqrt{e}})$
可知函数 $k(t)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 上单调递增, 所以 $0 < t(\frac{2}{\sqrt{e}} - t) < \frac{1}{e}$, 所以 $\ln[\frac{1}{\sqrt{e}}(\frac{2}{\sqrt{e}} - t)] < -1$,
所以 $-2 - 2\ln[\frac{1}{\sqrt{e}}(\frac{2}{\sqrt{e}} - t)] > 0$, 即 $F'(t) > 0$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 上恒成立. 10 分

所以 $F(t)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 上单调递增, 所以 $F(t) < F(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 0$, 所以 $h(t_1) < h(\frac{2}{\sqrt{e}} - t_2)$ 成立.
即 $h(t_1) < h(\frac{2}{\sqrt{e}} - t_2)$ 成立. 又 $t_1 > \frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}} - t_2 > \frac{1}{\sqrt{e}}$, 且 $h(t)$ 在 $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ 上单调递减,
所以 $t_1 > \frac{2}{\sqrt{e}} - t_2$, 所以 $t_1 + t_2 > \frac{2}{\sqrt{e}}$, 即 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{2}{\sqrt{e}}$, 所以 $\frac{1}{x_2} > \frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{1}{x_1}$,
所以 $x_1 - \frac{1}{x_2} < x_1 + \frac{1}{x_1} - \frac{2}{\sqrt{e}} < \sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}$, 即 $x_1 - \sqrt{e} < \frac{1}{x_2} - \frac{1}{\sqrt{e}}$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线