

湖北省黄冈中学 2023 届高三第三次模拟考试

数学试卷

命题教师：钟春林 夏泊凌 庄四化 审题教师：钟春林

考试时间：2023 年 5 月 24 日下午 15:00—17:00 试卷满分：150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid y = \lg(2-x) + \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right\}$ ，则 $\complement_U A =$ ()

A. $\{-2, -1, 2\}$ B. $\{-2, 2\}$ C. \emptyset D. $\{-2, -1, 0, 2\}$
2. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ，复数 $z = a + bi$ 满足 $z(1+i) = (1-2i)^2$ ，则 $a+b =$ ()

A. $-\frac{7}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -3 D. -4
3. 已知点 $M(1, \sqrt{3})$ 在圆 $C: x^2 + y^2 = m$ 上，过 M 作圆 C 的切线 l ，则 l 的倾斜角为 ()

A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°
4. 已知函数 $f(x) = 2\cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ ($\omega > 0$) 的图象在区间 $(0, 2\pi)$ 内至多存在 3 条对称轴，则 ω 的取值范围是 ()

A. $\left(0, \frac{5}{3}\right]$ B. $\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$ C. $\left[\frac{7}{6}, \frac{5}{3}\right)$ D. $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$
5. 中国救援力量在国际自然灾害中为拯救生命作出了重要贡献，很好地展示了国际形象，增进了国际友谊，多次为祖国赢得了荣誉。现有 5 支救援队前往 A, B, C 等 3 个受灾点执行救援任务，若每支救援队只能去其中的一个受灾点，且每个受灾点至少安排 1 支救援队，其中甲救援队只能去 B, C 两个受灾点中的一个，则不同的安排方法数是 ()

A. 72 B. 84 C. 88 D. 100
6. 抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线与 x 轴交于点 M ，过 C 的焦点 F 作斜率为 2 的直线交 C 于 A, B 两点，则 $\tan \angle AMB =$ ()

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $4\sqrt{5}$ D. 不存在
7. 我们打开购物平台时，会发现其首页上经常出现我们喜欢的商品，这是电商平台推送的结果。假设电商平台第一次给某人推送某商品，此人购买此商品的概率为 $\frac{2}{11}$ ，从第二次推送起，若前一次不购买此商品，

则此次购买的概率为 $\frac{1}{4}$ ；若前一次购买了此商品，则此次仍购买的概率为 $\frac{1}{3}$ ，记第 n 次推送时不购买此商品的概率为 P_n ，当 $n \geq 2$ 时， $P_n \leq M$ 恒成立，则 M 的最小值为 ()

- A. $\frac{93}{132}$ B. $\frac{97}{132}$ C. $\frac{73}{120}$ D. $\frac{97}{120}$

8. 定义在实数集 R 上的函数 $y = f(x)$ ，如果 $\exists x_0 \in R$ ，使得 $f(x_0) = x_0$ ，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不动点. 给定函数 $f(x) = \cos x$ ， $g(x) = \sin x$ ，已知函数 $f(x)$ ， $f(g(x))$ ， $g(f(x))$ 在 $(0, 1)$ 上均存在唯一不动点，分别记为 x_1 ， x_2 ， x_3 ，则 ()

- A. $x_3 > x_1 > x_2$ B. $x_2 > x_3 > x_1$ C. $x_2 > x_1 > x_3$ D. $x_3 > x_2 > x_1$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

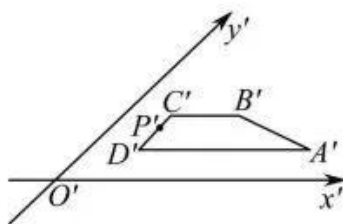
9. 下列结论正确的有 ()

- A. 若随机变量 ξ, η 满足 $\eta = 2\xi + 1$ ，则 $D(\eta) = 2D(\xi) + 1$
 B. 若随机变量 $\xi \sim N(3, \sigma^2)$ ，且 $P(\xi < 6) = 0.84$ ，则 $P(3 < \xi < 6) = 0.34$
 C. 若线性相关系数 $|r|$ 越接近 1，则两个变量的线性相关性越强
 D. 按从小到大顺序排列的两组数据：甲组：27, 30, 37, m , 40, 50；乙组：24, n , 33, 44, 48, 52.

若这两组数据的第 30 百分位数、第 50 百分位数都分别对应相等，则 $m + n = 67$.

10. 如图所示，四边形 $A'B'C'D'$ 是由斜二测画法得到的平面四边形 $ABCD$ 水平放置的直观图，其中， $A'D' = 5$ ， $C'D' = C'B' = 2$ ，点 P' 在线段 $C'D'$ 上， P' 对应原图中的点 P ，则在原图中下列说法正确的是 ()

- A. 四边形 $ABCD$ 的面积为 14
 B. 与 \overrightarrow{AB} 同向的单位向量的坐标为 $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$
 C. \overrightarrow{AD} 在向量 \overrightarrow{AB} 上的投影向量的坐标为 $(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5})$
 D. $|3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 最小值为 17



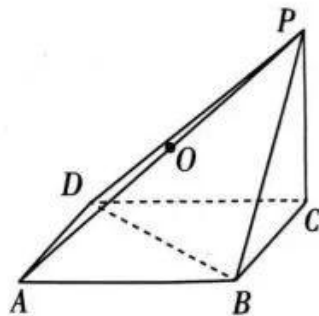
11. 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x^3 - x^2)$ ，若不等式 $f(x) > 0$ 有且只有三个整数解，则实数 a 的取值可以为 ()

- A. $\frac{\ln 5}{100}$ B. $\frac{\ln 2}{25}$ C. $\frac{\ln 2}{24}$ D. $\frac{\ln 5}{24}$

12. 如图所示, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PC \perp$ 平面 $ABCD$,

$AB = BC = PC = 2$, O 为 AP 的中点, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = l$, 则 $l \parallel AB$ 来源: 高三答案公众号
- B. 若过点 O 且与 PC 平行的平面截该四棱锥, 截面可能是五边形
- C. 平面 PBD 截该四棱锥外接球所得的截面面积为 $\frac{8}{3}\pi$
- D. A 为球心, 表面积为 $\frac{64}{3}\pi$ 的球的表面与四棱锥表面的交线长度之和等于 $\frac{7\sqrt{3}}{9}\pi$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(x^2 + 2y + x)^6$ 展开式中 x^5y^3 的系数为_____.

14. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, $a > 1$, $b > 1$, 若 $a^x = b^y = 3$, $3a + b = 18$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最大值为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 若 $b_{n+1} = (n - \lambda)(\frac{1}{a_n} + 1)$, $b_1 = -6$, 且数列 $\{b_n\}$ 为递增数列, 则实数 λ 的取值范围为_____.

16. 双曲线的中心为原点 O , 焦点在 y 轴上, F_1, F_2 分别是双曲线的两个焦点, 过上焦点 F_2 作斜率 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线 l 交双曲线上支于点 M, N , 若 $\triangle MF_1F_2$, $\triangle NF_1F_2$ 的内心分别是 P, Q , 且 $|MN| = 2\sqrt{3}|PQ|$, 则双曲线的离心率为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $4S_n = (a_n - 1)(a_n + 3)$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 将数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{2^n\}$ 中所有的项, 按照从小到大的顺序排列得到一个新数列 $\{b_n\}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 100 项和.

18. (12 分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 满足 $\frac{\sin A}{\sin C} - 1 = \frac{\sin^2 A - \sin^2 C}{\sin^2 B}$, 且 $A \neq C$.

(1) 求证: $B = 2C$;

(2) 已知 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 若 $a = 6$, 求线段 BD 长度的取值范围.

19. (12 分) 某购物中心准备进行扩大规模, 在制定未来发展策略时, 对中心的现有顾客满意度进行了一个初步的现场调查, 分别调查顾客对购物中心的商品质量、服务质量、购物环境、广告宣传的满意程度. 调查时将 对被抽中的每个顾客从这四个问题中随机抽取两个问题来提问, 统计顾客的满意情况. 假设, 有三名顾

客被抽到，且这三名顾客对这四个问题的满意情况如下表：

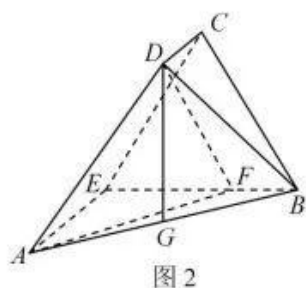
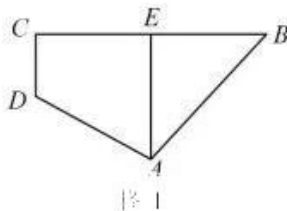
	商品质量	服务质量	购物环境	广告宣传
顾客甲	满意	不满意	满意	不满意
顾客乙	不满意	满意	满意	满意
顾客丙	满意	满意	满意	不满意

每得到一个满意加 10 分，最终以总得分作为制定发展策略的参考依据。

- 求购物中心得分为 50 分的概率；
- 若已知购物中心得分为 50 分，则顾客丙投出一个不满意的概率为多少？
- 列出该购物中心得到满意的个数 X 的分布列，并求得分 ξ 的数学期望。

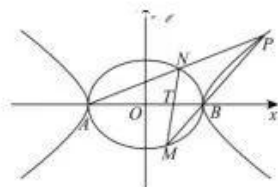
20. (12 分) 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $BC \perp CD$,

$AE \parallel CD$, $AE=BE=2CD=2$, $CE = \sqrt{3}$. 将四边形 $AECD$ 沿 AE 折起, 使得 $BC = \sqrt{3}$, 得到如图 2 所示的几何体.



- 若 G 为 AB 的中点, 证明: $DG \perp$ 平面 ADE ;
- 若 F 为 BE 上一动点, 且二面角 $B-AD-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 $\frac{EF}{EB}$ 的值.

21. (12 分) 如图, 双曲线的中心在原点, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 左、右顶点分别为 A 、 B . 曲线 C 是以双曲线的实轴为长轴, 虚轴为短轴, 且离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆, 设 P 在第一象限且在双曲线上, 直线 BP 交椭圆于点 M , 直线 AP 与椭圆交于另一点 N .



- 求椭圆及双曲线的标准方程;
- 设 MN 与 x 轴交于点 T , 是否存在点 P 使得 $x_p = 2x_T$ (其中 x_p, x_T 为点 P, T 的横坐标), 若存在, 求出 P 点的坐标, 若不存在, 请说明理由.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \sin x + \cos x + ax^2$, $g(x) = x \ln \frac{x}{\pi}$.

- 当 $a=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的极值;
- 用 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最大值, 记函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} (x > 0)$, 讨论函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点个数.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

