绝密★启用前

2023—2024 学年江西省高三 12 月统一调研测试

数　学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid xy=12, y\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\mid \log_2(x-3)<3\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{1,2,3,4,6\}$　　B. $\{3,4,6\}$

C. $\{4,6,12\}$　　D. $\{4,6\}$

2. 已知复数 $z=\sin\theta+\mathrm{i}$,则满足 $|z|\geqslant\sqrt{2}$ 的所有不相等的复数 z 之和的虚部为

A. 1　　B. i　　C. 2　　D. 2i

3. 已知直线 $\sqrt{3}x+2y-1=0$ 的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=(1,m)$,则 m 的值为

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 从 2,3,4,5,6 这 5 个数字中任取 3 个,则这 3 个数的乘积能被 12 整除的取法有

A. 7 种　　B. 8 种　　C. 9 种　　D. 10 种

5. 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$,若函数 $f(x)=\dfrac{a^x}{x(4^x-1)}$ 为偶函数,则 $a=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

6. 已知圆上两个不同的点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $B(\cos\beta,\sin\beta)$,若直线 AB 的斜率为 -1,则 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=$

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

7. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,则对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,“$a_{n+1}>|a_n|$”是“$nS_{n+1}>(n+1)S_n$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 定义:设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的附近有定义,当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有改变量 Δx 时,相应的二元函数 $z=f(x,y)$ 有改变量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$,如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}$ 存在,那么称此极限为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数,记作 $f_x(x_0,y_0)$. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一个点 (x,y) 对 x 的偏导数都存在,那么这个偏导数就是一个关于 x,y 的二元函数,它就被称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数,记作 $f_x(x,y)$. 已知 $F(x,y)=x^2+y^2-xy$,若 $F(x,y)=1$,则 $F_x(x,y)+F_y(x,y)$ 的取值范围为

A. $(-\infty,2]$　　B. $[-2,2]$　　C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2,下列双曲线中与双曲线 C 的渐近线相同的是

A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　B. $\frac{y^2}{3}-x^2=1$　　C. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$

10. 已知 $\left(\frac{1}{x}-2x\right)^n$ 的展开式中第 3 项与第 6 项的二项式系数相等,则二项式展开式中

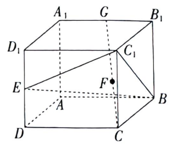
A. 所有二项式系数和为 128　　B. 所有项系数和为 -7

C. 不存在常数项　　D. 含 x^{-3} 项的系数为 -84

11. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$,其中 $\omega>0,\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数,若 $y=f(x)+f'(x)$ 的最大值为 $\sqrt{5}$,且 $f(0)\cdot f'(0)=\frac{\sqrt{3}}{\omega}$,则使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 的 m 的取值可以为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

12. 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,其表面积与 12 条棱长之和均为 24,E,G 分别为棱 DD_1,A_1B_1 的中点,则下列说法正确的是



A. 该长方体的外接球表面积为 12π

B. $CG\perp$ 平面 C_1BE

C. 若线段 CG 与平面 C_1BE 交于点 F,则 $CF:GF=3:4$

D. 平面 C_1BE 将长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 分成两部分,其中较小部分与较大部分的体积之比为 $7:17$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知抛物线 C 的顶点在坐标原点,焦点 F 在坐标轴上,若点 $P(1,2)$ 在 C 上且 $|PF|>2$,则 C 的方程为________.

14. 已知圆 $O:x^2+y^2=4$,写出满足条件“圆 O 上到直线 $x+\sqrt{3}y+m=0$ 的距离为 1 的点的个数是奇数”的一个 m 的值为________.

15. 达·芬奇认为:和音乐一样,数学和几何“包含了宇宙的一切”,从年轻时起,他就本能地把这些主题运用在作品中,布达佩斯的伊帕姆维泽蒂博物馆收藏的达·芬奇方砖,在正六边形上画了具有视觉效果的正方体图案(如图 1),把三片这样的达·芬奇方砖形成图 2 的组合,这个组合再转换成图 3 所示的几何体.若图 3 中每个正方体的棱长为 1,则异面直线 CQ 与 PF 所成角的余弦值为________.


图 1

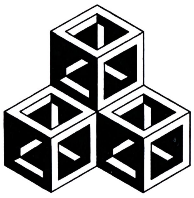


图 2

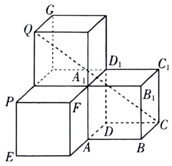
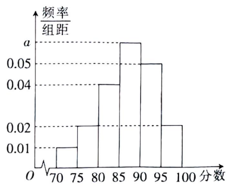


图 3

16. 已知函数 $f(x)=\sin 2x-2\sin x+x+1, x\in[-\pi,\pi]$ 的极值点从小到大依次为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,则 $\dfrac{x_n-x_1}{x_{n-1}-x_2}=$________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)某学校即将迎来建校 80 周年,为了增进学生爱校、荣校意识,团委组织学生开展“迎校庆、知校史”的知识竞赛活动,共有 100 名同学参赛.为了解竞赛成绩的分布情况,将 100 名同学的竞赛成绩按 $[70,75)$,$[75,80)$,$[80,85)$,$[85,90)$,$[90,95)$,$[95,100]$ 分成 6 组,绘制成如图所示的频率分布直方图.



(1)用样本估计总体,求图中 a 的值及此次知识竞赛成绩的 80% 分位数;

(2)现从竞赛成绩在 $[80,95)$ 的学生中以分层抽样的方式抽取 15 人进行培训,经过一轮培训后再选取 2 人担任主持人工作,求在至少 1 人来自分数段 $[90,95)$ 的条件下,另外 1 人来自分数段 $[80,85)$ 的概率.

18.（12分）如图1，在直角$\triangle ABC$中，$\angle A=90^\circ$，$AB=3$，$AC=4$，D，E分别为边AC，BC的中点，将$\triangle CDE$沿DE进行翻折，连接AC，BC得到四棱锥$C-ABED$（如图2），点F为BC的中点.

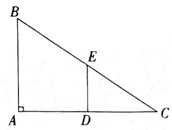


图1

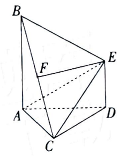


图2

（1）当点A与点C首次重合时，求$\triangle CDE$翻折旋转所得几何体的表面积；

（2）当$\triangle ACD$为正三角形时，求直线EF与平面ACE所成角的正弦值.

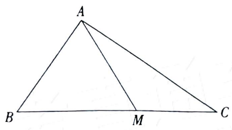
19.（12分）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$n\in\mathbf{N}^*$，条件①$a_4=7$；②$a_{11}=2a_6-1$；③$S_5=25$. 请从这三个条件中任选两个作为已知，解答下面的问题.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记数列$\left\{\dfrac{(-1)^n\cdot 4n}{(2n+1)\cdot a_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：对任意$p,q\in\mathbf{N}^*$，都有$T_p-T_q<1$.

注：如选择多种组合分别解答，按第一种解答计分.

20.（12分）如图，在$\triangle ABC$中，M是边BC上一点.



（1）若$AC=2AB=2BM=4CM=4$，求AM；

（2）若$7AB=7AM=5AC$，记$\angle BAM=\alpha$，$\angle CAM=\beta$，且$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{7}{3}$，求$\angle BAM$.

21.（12分）已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{12}=1\ (a>2\sqrt{3})$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$O$为坐标原点，点$P$为椭圆上的一点满足$|PF_1||PF_2|=15$，$2(|PF_1|^2+|PF_2|^2)=|F_1F_2|^2+52$.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）设椭圆C的左、右顶点分别为A，B，过F_1作一条斜率不为零的直线与椭圆C分别交于M，N两点，直线AM，BN与y轴的交点分别为$(0,m)$，$(0,n)$，求$|m\overrightarrow{AF_1}+n\overrightarrow{F_1B}|$.

22.（12分）已知函数$f(x)=\dfrac{1}{4}(2x-a)e^{2x}+be^x$，$f(x)$的图象在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=x+\dfrac{3}{4}$.

（1）求$f(x)$的解析式；

（2）证明：$\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)>2\ln x+3$恒成立.

2023—2024 学年江西省高三 12 月统一调研测试

数学参考答案及评分细则

1.【答案】D

【解析】易得 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$，$B=\{x|3<x<11\}$，从而 $A\cap B=\{4,6\}$，故选 D.

2.【答案】C

【解析】由 $|z|\geqslant\sqrt{2}$ 得，$\sin^2\theta+1\geqslant 2$，从而 $\sin^2\theta\geqslant 1$，即 $\sin^2\theta=1$，因此 $\sin\theta=\pm 1$. 满足 $|z|\geqslant 2$ 的所有不相等的复数 z 有 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=-1+\mathrm{i}$，所以 $z_1+z_2=2\mathrm{i}$，故选 C.

3.【答案】D

【解析】易知直线 $\sqrt{3}x+2y-1=0$ 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\boldsymbol{v}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，即 $m=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 D.

4.【答案】A

【解析】从 2，3，4，5，6 这 5 个数字中任取 3 个共有 $C_5^3=10$ 种取法，其中这 3 个数的乘积不能被 12 整除的取法有 3 种，分别为 $2\times3\times5$，$2\times4\times5$，$3\times5\times6$，所以这 3 个数的乘积能被 12 整除的取法有 7 种，故选 A.

5.【答案】C

【解析】由题知 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)-f(-x)=0$，即 $\frac{a^x}{x(4^x-1)}+\frac{a^{-x}}{x(4^{-x}-1)}=\frac{a^x}{x(4^x-1)}+\frac{4^x\cdot a^{-x}}{x(1-4^x)}=0$，解得 $a=2$，故选 C.

6.【答案】B

【解析】解法一：因为直线 AB 的斜率为 -1，所以 $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-1$. 从而 $\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=-1$，因此 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=1$，故选 B.

解法二：取 $\alpha=0$，$\beta=\frac{\pi}{2}$，则 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\tan\frac{\pi}{4}=1$，故选 B.

解法三：设 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 $M\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$，由圆的性质，$OM\perp AB$，$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=k_{OM}=-\frac{1}{k_{AB}}=1$，故选 B.

7.【答案】A

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_{n+1}>|a_n|$ 可得 $a_{n+1}>a_n$，即 $d>0$，从而 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}>0$，即 $nS_{n+1}>(n+1)S_n$. 反之，由 $nS_{n+1}>(n+1)S_n$ 可得 $d>0$，从而 $a_{n+1}>a_n$，但 $a_{n+1}>|a_n|$ 不一定成立，所以“$a_{n+1}>|a_n|$”是“$nS_{n+1}>(n+1)S_n$”的充分不必要条件，故选 A.

8.【答案】B

【解析】由 $F(x,y)=1$，得 $x^2+y^2-xy=1$，所以 $x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=1$，从而 $(x+y)^2=1+3xy\leqslant 1-\frac{3}{4}(x+y)^2$，即 $(x+y)^2\leqslant 4$，解得 $-2\leqslant x+y\leqslant 2$，当 $x=y=-1$ 时，$x+y=-2$，当 $x=y=1$ 时，$x+y=2$，$F_x(x,y)+F_y(x,y)=2x-y+2y-x=x+y\in[-2,2]$，故选 B.

9.【答案】BCD

【解析】因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为2，所以 $2^2=1+\frac{b^2}{a^2}$，解得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以双曲线 C 的渐近线为 $y=\pm\sqrt{3}x$. 双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，故 A 选项错误；双曲线 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$，$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$ 的渐近线均为 $y=\pm\sqrt{3}x$，故选 BCD.

10.【答案】AC

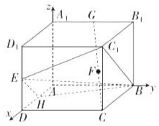
【解析】因为第3项与第6项的二项式系数相等，则 $C_n^2=C_n^5$，解得 $n=7$，所以 $\left(\frac{1}{x}-2x\right)^7$ 的展开式中所有二项式系数和为 $2^7=128$，故选项 A 正确；将 $x=1$ 代入二项式中可得各项系数和为 $(-1)^7=-1$，故选项 B 错误；在 $\left(\frac{1}{x}-2x\right)^7$ 中，第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_7^r\left(\frac{1}{x}\right)^{7-r}\cdot(-2x)^r=C_7^r\cdot(-2)^r\cdot x^{2r-7}$，取 $2r-7=0$，即 $r=\frac{7}{2}\notin\mathbf{N}$，所以不存在常数项，故选项 C 正确；取 $2r-7=-3$，即 $r=2$，所以 $T_3=C_7^2\cdot(-2)^2\cdot x^{-3}=84x^{-3}$，所以含 x^{-3} 项的系数为84，故选项 D 错误，故选 AC.

11.【答案】BC

【解析】由 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\omega\cos(\omega x+\varphi)$，所以 $y=f(x)+f'(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\omega\cos(\omega x+\varphi)=\sqrt{1+\omega^2}\cdot\sin(\omega x+\varphi+\theta)$（其中 $\tan\theta=\omega$），因为 $y=f(x)+f'(x)$ 的最大值为 $\sqrt{5}$，所以 $\sqrt{1+\omega^2}=\sqrt{5}$，又 $\omega>0$，所以 $\omega=2$. 因为 $f(0)\cdot f'(0)=\frac{\sqrt{3}}{\omega}$，所以 $2\sin\varphi\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\sin 2\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又因为 $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，因此 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 要使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$，则 $\frac{\pi}{2}\leqslant 2m+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，解得 $\frac{\pi}{6}\leqslant m\leqslant\frac{\pi}{3}$，故选 BC.

12.【答案】ABD

【解析】设该长方体的长、宽、高分别为 a,b,c，由题意知 $\begin{cases}2(ab+bc+ca)=24,\\4(a+b+c)=24,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ab+bc+ca=12,\\a+b+c=6,\end{cases}$ 该长方体的外接球半径 $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}=\sqrt{3}$，则外接球表面积为 12π，故 A 正确；因为 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$，所以 $a=b=c$，从而该长方体是棱长为2的正方体，以 A 为坐标原点，AD,AB,AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(0,2,0)$，$C(2,2,0)$，$E(2,0,1)$，$G(0,1,2)$，$C_1(2,2,2)$. 对于 B 选项，$\overrightarrow{CG}=(-2,-1,2)$，$\overrightarrow{C_1B}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{C_1E}=(0,-2,-1)$，则 $\overrightarrow{C_1B}\cdot\overrightarrow{CG}=0$ 且 $\overrightarrow{C_1E}\cdot\overrightarrow{CG}=0$，$C_1B\cap C_1E=C_1$，所以 $CG\perp$ 平面 C_1BE，故选项 B 正确；对于 C 选项，由 B 可知，平面 C_1BE 的一个法向量为 $\overrightarrow{CG}=(-2,-1,2)$，又 $\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$，所以点 C 到平面 C_1BE 的距离为 $CF=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CG}|}{|\overrightarrow{CG}|}=\frac{4}{3}$，又 $|\overrightarrow{CG}|=3$，所以 $GF=\frac{5}{3}$，$CF:GF=4:5$，故选项 C 错误；对于 D 选项，设平面 C_1BE 与棱 DA 交于点 H，易知 H 为 DA 的中点，棱台 $EHD-C_1BC$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}+2+1\right)\times 2=\frac{7}{3}$，而长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为8，所以平面 C_1BE 将长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 分成两部分，其中较小部分与较大部分的体积之比为 $7:17$，故选项 D 正确，故选 ABD.



13.【答案】$x^2=\frac{1}{2}y$

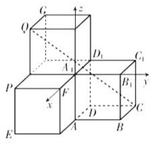
【解析】由题意知,抛物线的焦点 F 在坐标轴的正半轴. 当抛物线的焦点 F 在 x 轴的正半轴时,设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$,将点 $P(1,2)$代入解得 $p=2$,且 $|PF|=1+\frac{p}{2}=2$,不符合题意;当抛物线的焦点 F 在 y 轴的正半轴时,设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$,将点 $P(1,2)$代入解得 $p=\frac{1}{4}$,且 $|PF|=2+\frac{p}{2}=\frac{17}{8}>2$,符合题意,此时抛物线方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$.

14.【答案】-2(或 2 或 -6 或 6)

【解析】由题意知,当圆心到直线的距离为 3,即$\frac{|m|}{2}=3$,$m=\pm6$ 时,圆 O 上到直线 $x+\sqrt{3}y+m=0$ 距离为 1 的点的个数为 1;当圆心到直线的距离为 1,即$\frac{|m|}{2}=1$,$m=\pm2$ 时,圆 O 上到直线 $x+\sqrt{3}y+m=0$ 距离为 1 的点的个数为 3,故 m 的取值为 -2 或 2 或 -6 或 6.

15.【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】如图以 A_1 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A_1(0,0,0)$,$B_1(0,1,0)$,$Q(0,-1,1)$,$C(-1,1,-1)$,$\overrightarrow{CQ}=(1,-2,2)$,$\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{A_1B_1}=(0,1,0)$,设 CQ 与 PF 所成的角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{PF}\rangle|=\left|\frac{-2}{\sqrt{1+4+4}\times1}\right|=\frac{2}{3}$.



16.【答案】3

【解析】$f'(x)=2\cos2x-2\cos x+1=4\cos^2x-2\cos x-1$,由 $f'(x)=0$,解得 $\cos x=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$或 $\cos x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$,由图可知,在区间$[-\pi,\pi]$上,$\cos x=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$的两个实根为 x_1,x_4,即 $\cos x_1=\cos x_4=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$,且 $x_1+x_4=0$,$-\pi<x_1<-\frac{\pi}{2}$;$\cos x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$的两个实根为 x_2,x_3,即 $\cos x_2=\cos x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$,且 $x_2+x_3=0$,$-\frac{\pi}{2}<x_2<0$. $\cos(x_3-x_2)=\cos2x_3=2\cos^2x_3-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,$\cos(x_4-x_3)=\cos x_4\cos x_3+\sin x_4\sin x_3=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,显然 $0<x_3-x_2<\pi$,$0<x_4-x_3<\pi$,所以 $x_3-x_2=x_4-x_3$,所以 x_1,x_2,x_3,x_4 成等差数列,故$\frac{x_n-x_1}{x_{n-1}-x_2}=\frac{x_4-x_1}{x_3-x_2}=3$.

【评分细则】

1. 第 13 题答案写成 $2x^2=y$ 的形式不扣分;
2. 第 14 题答案只需填一个值即可,如果多填且正确不扣分,多填出现错误的值不给分;
3. 第 15 题答案不约分不扣分,写成小数不给分.

17. 解:(1)依题意得$(0.01+0.02\times2+0.04+a+0.05)\times5=1$,解得 $a=0.06$.(2 分)

由$(0.01+0.02+0.04+0.06)\times5=0.65<0.8$,

$(0.01+0.02+0.04+0.06+0.05)\times 5=0.9>0.8$,

所以知识竞赛成绩的80%分位数位于区间[90,95),设为x,

则$0.65+0.25\times\frac{x-90}{5}=0.8$,解得$x=93$,

所以此次知识竞赛成绩的80%分位数为93.(5分)

(2)因为从竞赛成绩在[80,95)的学生中以分层抽样的方式抽取15人,其中竞赛成绩在分数段[80,85),[85,90),[90,95)的人数分别为4,6,5,(6分)

解法一:至少有一人来自分数段[90,95)的情况共有$C_5^2+C_5^1C_{10}^1=60$种,(7分)

选出的2人中1人来自分数段[90,95),另外1人来自分数段[80,85)的情况有$C_4^1C_5^1=20$种,(8分)

故选出2人且在至少1人来自分数段[90,95)的条件下,另外1人来自分数段[80,85)的概率为$\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.(10分)

解法二:记事件A代表"选出的2人中至少1人来自分数段[90,95)",事件B代表"选出的2人中1人来自分数段[90,95),另外1人来自分数段[80,85)",

由$P(A)=\frac{C_5^2+C_5^1C_{10}^1}{C_{15}^2}=\frac{60}{105}$,$P(AB)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_{15}^2}=\frac{20}{105}$,(8分)

故$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{20}{105}}{\frac{60}{105}}=\frac{1}{3}$.(10分)

【评分细则】

1. 第(1)问没有计算过程,直接写出80%分位数,扣1分;
2. 第(2)问没有用符号或者文字表示事件、概率扣1分,计算公式正确但结果算错扣2分.

18. 解:(1)由题意,在$\triangle ABC$中,$\angle A=90^\circ$,$AB=3$,$AC=4$,DE是$\triangle ABC$的中位线,

当点A与点C首次重合时,$\triangle CDE$翻折旋转所得的几何体是以2为半径、$\frac{3}{2}$为高的半个圆锥,(1分)

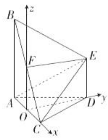
所以$\triangle CDE$翻折旋转所得几何体的表面积为

$S=\frac{1}{2}(\pi\cdot DC\cdot EC+\pi\cdot DC^2)+\frac{1}{2}AC\cdot DE$

$=\frac{1}{2}\times\left(\pi\times 2\times\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\pi\times 2^2\right)+\frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2}=3+\frac{9\pi}{2}$.(5分)

(2)当$\triangle ACD$为正三角形时,以AC的中点O为原点,OC,OD,OF所在直线分别为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系,

有$A(-1,0,0)$,$C(1,0,0)$,$E\left(0,\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$,$F\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$,(6分)



则$\overrightarrow{AC}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{CE}=\left(-1,\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$,(7分)

设平面ACE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-x+\sqrt{3}y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$(9分)

令 $z=2$，平面 ACE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{3},2)$，（10 分）

又因为 $\overrightarrow{EF}=(0,-\sqrt{3},0)$，（11 分）

设直线 EF 与平面 ACE 所成的角为 α，

$\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|3|}{\sqrt{3+4}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.（12 分）

【评分细则】

1. 第（1）问侧面积算对给 2 分；

2. 第（2）问使用其它建系方式酌情给分.

19.（1）解：在等差数列 $\{a_n\}$ 中，设首项为 a_1，公差为 d，

若选条件①②有 $\begin{cases}a_1+3d=7,\\a_1+10d=2(a_1+5d)-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_1+3d=7,\\a_1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$（4 分）

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.（6 分）

若选条件①③有 $\begin{cases}a_1+3d=7,\\5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=25,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_1+3d=7,\\a_1+2d=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$（4 分）

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.（6 分）

若选条件②③有 $\begin{cases}a_1+10d=2(a_1+5d)-1,\\5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=25,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_1=1,\\a_1+2d=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$（4 分）

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.（6 分）

（2）证明：由（1）可知 $a_n=2n-1$，则 $\dfrac{(-1)^n\cdot4n}{(2n+1)\cdot(2n-1)}=(-1)^n\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\right)$，（8 分）

所以 $T_n=-\left(1+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}\right)+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{2n-1}+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}-1$.（9 分）

解法一：当 n 为偶数时，$T_n=\dfrac{1}{2n+1}-1$ 单调递减，$-1<T_n\leqslant T_2=-\dfrac{4}{5}$，（10 分）

当 n 为奇数时，$T_n=\dfrac{-1}{2n+1}-1$ 单调递增，$-\dfrac{4}{3}=T_1\leqslant T_n<-1$，（11 分）

故 T_n 的最大值与最小值分别为 $-\dfrac{4}{5}$ 与 $-\dfrac{4}{3}$.

又 $-\dfrac{4}{5}-\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{8}{15}<1$，所以对任意 $p,q\in\mathbf{N}^*$，都有 $T_p-T_q<1$.（12 分）

解法二：当 $p,q\in\mathbf{N}^*$ 时，$T_p-T_q=\dfrac{(-1)^p}{2p+1}-\dfrac{(-1)^q}{2q+1}\leqslant\dfrac{1}{2p+1}+\dfrac{1}{2q+1}$，（11 分）

而 $\dfrac{1}{2p+1}+\dfrac{1}{2q+1}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$，

所以对任意 $p,q\in\mathbf{N}^*$，都有 $T_p-T_q<1$.（12 分）

【评分细则】

第（2）问使用其它放缩方法若无误不扣分.

20. 解：（1）解法一：由 $AC=2AB=2BM=4CM=4$，得 $AC=4$，$AB=BM=2$，$CM=1$，

因为 $\cos\angle BMA+\cos\angle CMA=0$，（2 分）

所以 $\dfrac{AM^2+BM^2-AB^2}{2AM\cdot BM}+\dfrac{AM^2+CM^2-AC^2}{2AM\cdot CM}=0$，

即 $\dfrac{AM^2+4-4}{4AM}+\dfrac{AM^2+1-16}{2AM}=0$，（4 分）

解得 $AM=\sqrt{10}$. (5 分)

解法二:由 $AC=2AB=2BM=4CM=4$,得 $AC=4$,$AB=2$,$BC=BM+CM=3$,(1 分)

在$\triangle ABC$中由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{4+9-16}{2\times2\times3}=-\dfrac{1}{4}$,(3 分)

在$\triangle ABM$中由余弦定理得 $AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos B=4+4-2\times2\times2\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=10$,

即 $AM=\sqrt{10}$. (5 分)

(2)因为 $S_{\triangle ABM}+S_{\triangle ACM}=S_{\triangle ABC}$,所以$\dfrac{\sin\alpha}{AC}+\dfrac{\sin\beta}{AB}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}$. (7 分)

又 $7AB=7AM=5AC$,所以$\dfrac{\sin\alpha}{7}+\dfrac{\sin\beta}{5}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{5}$,

进一步有 $5\sin\alpha+7\sin\beta=7\sin\alpha\cos\beta+7\cos\alpha\sin\beta$,①(8 分)

又因为$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{7}{3}$,即 $7\sin\beta=3\sin\alpha$,②

②代入①得 $8=7\cos\beta+3\cos\alpha$,③(10 分)

由②③并结合 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$,解得 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$,所以$\angle BAM=\alpha=\dfrac{\pi}{3}$. (12 分)

【评分细则】

1. 第(1)问直接用中线长结论得出答案扣 1 分,如果用向量方法可酌情给分;
2. 第(2)问直接得到$\dfrac{\sin\alpha}{AC}+\dfrac{\sin\beta}{AB}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{AM}$不扣分.

21. 解:(1)设 $|PF_1|=u$,$|PF_2|=v$,

则$\begin{cases}uv=15,\\u^2+v^2=2(a^2-12)+26,\text{(3 分)}\\u+v=2a,\end{cases}$

解得 $a^2=16$,

所以椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$. (5 分)

(2)设直线 MN 的方程为 $x=ty-2$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

与椭圆方程$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 联立并化简得$(3t^2+4)y^2-12ty-36=0$,(6 分)

则 $y_1+y_2=\dfrac{12t}{3t^2+4}$,$y_1y_2=\dfrac{-36}{3t^2+4}$,(7 分)

从而 $ty_1y_2=-3(y_1+y_2)$. (8 分)

直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+4}(x+4)$,令 $x=0$,得 $m=\dfrac{4y_1}{x_1+4}$,同理 $n=\dfrac{-4y_2}{x_2-4}$,(9 分)

由 $m\overrightarrow{AF_1}+n\overrightarrow{F_1B}=m(2,0)+n(6,0)=(2m+6n,0)$,

而 $2m+6n=\dfrac{8y_1}{x_1+4}+\dfrac{-24y_2}{x_2-4}=\dfrac{8y_1(x_2-4)-24y_2(x_1+4)}{(x_1+4)(x_2-4)}=\dfrac{8y_1(ty_2-6)-24y_2(ty_1+2)}{(x_1+4)(x_2-4)}$

$=\dfrac{-16ty_1y_2-48(y_1+y_2)}{(x_1+4)(x_2-4)}=\dfrac{-16\times[-3(y_1+y_2)]-48(y_1+y_2)}{(x_1+4)(x_2-4)}=0$,(11 分)

所以 $m\overrightarrow{AF_1}+n\overrightarrow{F_1B}=(0,0)$,

即 $|m\overrightarrow{AF_1}+n\overrightarrow{F_1B}|=0$. (12 分)

【评分细则】

1. 第(1)问未列方程组直接得出椭圆的标准方程扣 3 分,方程不全而得出椭圆的标准方程扣 1 分;
2. 第(2)问得到 $m\overrightarrow{AF_1}+n\overrightarrow{F_1B}$的横坐标为零后直接得出 $|m\overrightarrow{AF_1}+n\overrightarrow{F_1B}|=0$ 不扣分.

22. 解：(1)因为函数$f(x)$的图象在$(0,f(0))$处的切线方程为$y=x+\frac{3}{4}$，所以$f(0)=\frac{3}{4}$，$f'(0)=1$.

$f(0)=-\frac{a}{4}+b=\frac{3}{4}$，①(1 分)

又$f'(x)=\left(x+\frac{1-a}{2}\right)e^{2x}+be^{x}$，(2 分)

所以$f'(0)=\frac{1-a}{2}+b=1$，②(3 分)

由①②解得$a=1$，$b=1$，

所以$f(x)=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+e^{x}$. (5 分)

(2)设$F(x)=f(x)-2\ln x-3=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+e^{x}-2\ln x-3$，

$F'(x)=xe^{2x}+e^{x}-\frac{2}{x}=(xe^{x}+2)\left(e^{x}-\frac{1}{x}\right)$，(6 分)

又当$x>0$时，$xe^{x}+2>0$，

令$F'(x)=0$，即$e^{x}-\frac{1}{x}=0$，

设$g(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$，易知$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$g\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2=\sqrt{e}-2<0$，$g(1)=e-1>0$，

所以存在唯一的$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$g(x_0)=0$，即$F'(x_0)=0$. (8 分)

且当$x\in(0,x_0)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，

从而$F(x)$的最小值为$F(x_0)$. (9 分)

由$F'(x_0)=0$得，$e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，即$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$.

所以$F(x_0)=\frac{1}{4}(2x_0-1)e^{2x_0}+e^{x_0}-2\ln x_0-3$

$=\frac{2x_0-1}{4x_0^2}+\frac{1}{x_0}+2x_0-3=-\frac{1}{4x_0^2}+\frac{3}{2x_0}+2x_0-3$，(10 分)

令$h(t)=-\frac{1}{4t^2}+\frac{3}{2t}+2t-3$，$t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

$h'(t)=\frac{1}{2t^3}-\frac{3}{2t^2}+2=\frac{4t^3-3t+1}{2t^3}$，

令$\varphi(t)=4t^3-3t+1$，$\varphi'(t)=12t^2-3$，

显然当$t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$\varphi'(t)>0$，所以$\varphi(t)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递增，从而$\varphi(t)>\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=0$，(11 分)

即$h'(t)>0$，所以$h(t)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递增，从而$h(t)>h\left(\frac{1}{2}\right)=0$，即$F(x_0)>0$，

因此$F(x)>0$，即$\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)>2\ln x+3$恒成立. (12 分)

【评分细则】

1. 第(1)问$f'(x)$未化简成$f'(x)=\left(x+\frac{1-a}{2}\right)e^{2x}+be^{x}$不扣分；

2. 第(2)问采用其他解法酌情给分.

数学　第 7 页(共 7 页)

关于我们