

# 2024 年高考数学第一次模拟考试（七省新高考）

## 高三数学

（考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分）

### 注意事项：

1. 本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第I卷时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第II卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 测试范围：**高考全部内容**
5. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

### 第I卷（选择题）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 设  $i$  为虚数单位，复数  $z$  满足  $(1+i)z = (-1+i)^2$ ，则  $|z+2| = ( \quad )$   
A.  $\sqrt{2}$                       B. 2                              C.  $\sqrt{3}$                       D. 1
2. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 6x - 7 \geq 0\}$ ,  $B = \{x | 2 - x > 6\}$ ，则  $A \cup B = ( \quad )$   
A.  $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$                       B.  $(-\infty, -1] \cup (4, +\infty)$   
C.  $(-\infty, -4) \cup [1, +\infty)$                       D.  $[7, +\infty)$
3. “ $n > m > 0$ ”是“方程  $mx^2 + ny^2 = 1$  表示焦点在  $x$  轴上的椭圆”的  $( \quad )$   
A. 充要条件                      B. 必要而不充分条件  
C. 充分而不必要条件                      D. 既不充分也不必要条件
4. 某校高三年级有 500 人，一次数学考试的成绩  $X$  服从正态分布  $N(110, 100)$ 。估计该校高三年级本次考试学生数学成绩在 120 分以上的有  $( \quad )$   
参考数据：若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$ ,  $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$ ,  
 $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$ .  
A. 75 人                      B. 77 人                      C. 79 人                      D. 81 人

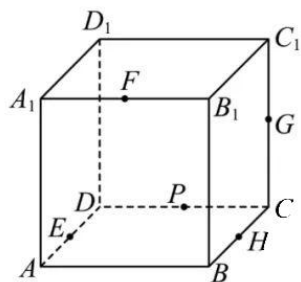
5. 唐代诗人李颀的诗《古从军行》开头两句“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河”隐含着一个有趣的数学问题——“将军饮马”问题，即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发，先到河边饮马后再回到军营，怎样走才能使总路程最短？在平面直角坐标系中，设军营所在区域为  $x^2 + y^2 \leq 2$ ，河岸线所在直线方程为  $x + y = 3$ ，若将军从点  $A(0, 2)$  处出发，并假定将军只要到达军营所在区域即回到军营，则“将军饮马”的最短路程为 ( )

- A.  $\sqrt{10} - 1$       B.  $2\sqrt{5} - 1$       C.  $2\sqrt{5} - \sqrt{2}$       D.  $\sqrt{10} - \sqrt{2}$

6. 已知函数  $f(x) = 2^{x^2 + 4ax + 2}$  在区间  $(-\infty, 6)$  上单调递减，则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $a \geq 3$       B.  $a \leq 3$       C.  $a < -3$       D.  $a \leq -3$

7. 如图，在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $E, F, G, H, P$  均为所在棱的中点，则下列结论正确的是 ( )



- A. 棱  $DD_1$  上一定存在点  $Q$ ，使得  $QB \perp QC_1$
- B. 设点  $M$  在平面  $BB_1C_1C$  内，且  $A_1M \parallel$  平面  $AGH$ ，则  $A_1M$  与平面  $BB_1C_1C$  所成角的余弦值的最大值为  $\frac{1}{3}$
- C. 过点  $E, F, G$  作正方体的截面，则截面面积为  $3\sqrt{3}$
- D. 三棱锥  $P - EFH$  的外接球的体积为  $8\pi$

8. 定义在区间  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  满足： $2f(x) < xf'(x) < 3f(x)$  对  $x \in (0, +\infty)$  恒成立，其中  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数，则

- A.  $\frac{1}{4} < \frac{f(1)}{f(2)} < \frac{1}{2}$
- B.  $\frac{1}{8} < \frac{f(1)}{f(2)} < \frac{1}{4}$
- C.  $\frac{1}{3} < \frac{f(1)}{f(2)} < \frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{16} < \frac{f(1)}{f(2)} < \frac{1}{8}$

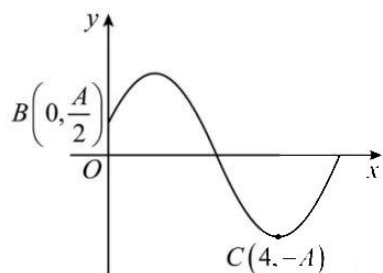
二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目的要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知一组样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_{15}$ ，其中  $x_i = 2i$  ( $i = 1, 2, \dots, 15$ )，由这组数据得到另一组新的样本数据  $y_1, y_2, \dots, y_{15}$ ，其中  $y_i = x_i - 20$ ，则 ( )

- A. 两组样本数据的样本方差相同
- B. 两组样本数据的样本平均数相同
- C.  $y_1, y_2, \dots, y_{15}$  样本数据的第 30 百分位数为 -10
- D. 将两组数据合成一个样本容量为 30 的新的样本数据，该样本数据的平均数为 5

10. 若函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象如图，且  $B(0, \frac{A}{2}), C(4, -A)$ ，

则下列说法正确的是 ( )



- A. 函数  $f(x)$  的周期为 5
- B. 函数  $f(x)$  的对称轴为  $x = 1 + 3k, k \in \mathbf{Z}$
- C. 函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  内没有单调性
- D. 若将  $f(x)$  的图象向左平移  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) 个单位长度，得到的函数图象关于  $y$  轴对称，则  $\alpha$  的最小值为 1

11. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) + f(x) = 0$ ，且  $y = f(2-x)$  为偶函数，则下列说法一定正确的是 ( )

- A. 函数  $f(x)$  的周期为 2
- B. 函数  $f(x)$  的图象关于  $(1, 0)$  对称
- C. 函数  $f(x)$  为偶函数
- D. 函数  $f(x)$  的图象关于  $x = 3$  对称

12. 已知  $F$  是抛物线  $W: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点, 点  $A(1, 2)$  在抛物线  $W$  上, 过点  $F$  的两条互相垂直的直线  $l_1, l_2$  分别与抛物线  $W$  交于  $B, C$  和  $D, E$ , 过点  $A$  分别作  $l_1, l_2$  的垂线, 垂足分别为  $M, N$ , 则 ( )

- A. 四边形  $AMFN$  面积的最大值为 2  
 B. 四边形  $AMFN$  周长的最大值为  $4\sqrt{2}$   
 C.  $\frac{1}{|BC|} + \frac{1}{|DE|}$  为定值  $\frac{1}{2}$   
 D. 四边形  $BDCE$  面积的最小值为 32

## 第II卷 (非选择题)

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 已知向量  $\vec{a}$  是单位向量, 且  $\vec{a}$  与  $\vec{a} + \vec{b}$  垂直,  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $135^\circ$ , 则  $|\vec{b}| =$  \_\_\_\_\_.
14. 已知正四棱台  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = 3A_1B_1 = 3$ ,  $AA_1 = \sqrt{6}$ , 则其体积为 \_\_\_\_\_.
15. 试写出曲线  $y = 2e^x$  与曲线  $y = 2\ln(x+2)$  的一条公切线方程 \_\_\_\_\_.
16. 已知各项都不为 0 的数列  $\{a_n\}$  的前  $k$  项和  $S_k$  满足  $2S_k = a_k a_{k+1}$ , 其中  $a_1 = 1$ , 设数列  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 若对一切  $n \in \mathbf{N}^*$ , 恒有  $T_{2n} - T_n > \frac{t}{16}$  成立, 则  $t$  能取到的最大整数是 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本小题共 6 小题, 共 70 分, 其中第 17 题 10 分, 18~22 题 12 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对边分别为  $a, b, c$ ,  $b \cos A = a \left( \cos B - \frac{2}{3} \right) + c$ .

(1) 求  $\cos B$ ;

(2) 若  $b=3, a>c$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $2\sqrt{2}$ , 求  $a$ .

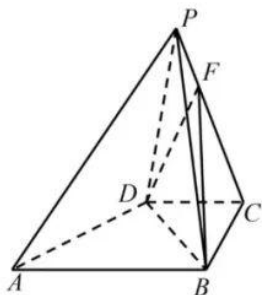
18. 设同时满足条件: ①  $\frac{b_n + b_{n+2}}{2} \geq b_{n+1}$ ; ②  $b_n \leq M (n \in \mathbf{N}^*, M \text{ 是常数})$  的无穷数列  $\{b_n\}$  叫做  $P$  数列,

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n = \frac{a}{a-1}(a_n - 1) (a \text{ 为常数, 且 } a \neq 0, a \neq 1)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \frac{2S_n}{a_n} + 1$ , 若数列  $\{b_n\}$  为等比数列, 求  $a$  的值; 并证明数列  $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$  为  $P$  数列.

19. 四棱锥  $P-ABCD$  中, 四边形  $ABCD$  为梯形, 其中  $AB \parallel DC$ ,  $AB = 2BC = 2CD = 4$ ,  $\angle BCD = 60^\circ$ , 平面  $PBD \perp$  平面  $ABCD$ .



(1) 证明:  $PB \perp AD$ ;

(2) 若  $PB = PD$ , 且  $PA$  与平面  $ABCD$  所成角的正弦值为  $\frac{3\sqrt{22}}{22}$ , 点  $F$  在线段  $PC$  上且满足  $\overline{PF} = \frac{1}{2}\overline{FC}$ , 求二面角  $D-BF-C$  的余弦值.

20. 击鼓传花, 也称传彩球, 是中国古代传统民间酒宴上的助兴游戏, 属于酒令的一种, 又称“击鼓催花”, 在唐代时就已出现. 杜牧《羊栏浦夜陪宴会》诗句中有“球来香袖依稀暖, 酒凸觥心泛艳光”, 可以得知唐代酒宴上击鼓传花助兴的情景. 游戏规则为: 敲响时, 开始传花(或一小物件), 敲响时众人开始依次传花, 至鼓停为止, 此时花在谁手中(或其序位前), 谁就上台表演节目(多是唱歌、跳舞、说笑话; 或回答问题、猜谜、按纸条规定行事等). 某单位组织团建活动, 9 人一组, 共 9 组, 玩击鼓传花, 组号  $x$  (前五组) 与组内女性人数  $y$  统计结果如表:

$x$	1	2	3	4	5
$y$	2	2	3	4	4

若女性人数  $y$  与组号  $x$  (组号变量  $x$  依次为 1, 2, 3, 4, 5, ...) 具有线性相关关系.

(1) 请求出女性人数  $y$  关于组号  $x$  的回归直线方程; (参考公式  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ )

(2) 从前 5 组中随机抽取 3 组, 若 3 组中女性人数不低于 3 人的有  $X$  组, 求  $X$  的分布列与期望.

21. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  的离心率为  $\sqrt{2}$ , 直线  $l_1: y = 2x + 4\sqrt{3}$  与双曲线  $C$  仅有一个公共点.

(1) 求双曲线  $C$  的方程

(2) 设双曲线  $C$  的左顶点为  $A$ , 直线  $l_2$  平行于  $l_1$ , 且交双曲线  $C$  于  $M, N$  两点, 求证:  $\triangle AMN$  的垂心在双曲线  $C$  上.

22. 已知函数  $f(x) = x^2 - a \ln x$ ,  $g(x) = x^2 - \frac{e^x}{x}$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 证明: 当  $a \in \left(0, \frac{e^2}{2}\right]$  时,  $g(x) < f(x)$  恒成立.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

