深圳市宝安区高三期末考试
数学参考答案

1. B　因为$(2+i)^3=(4+4i+i^2)(2+i)=(3+4i)(2+i)=6+3i+8i+4i^2=2+11i$，所以复数$(2+i)^3$的实部与虚部之和是$2+11=13$.

2. C　联立$\begin{cases}y=x^2-2x-1,\\y=3x+1,\end{cases}$整理得$x^2-5x-2=0$. 由$\Delta=(-5)^2-4\times1\times(-2)=33>0$，得原方程组有两组解，即$A\cap B$中有2个元素.

3. A　由题意可知抽取到的男性职工人数为$320\times\frac{100}{500}=64$，女性职工人数为$100-64=36$，则抽取到的男性职工的人数比女性职工的人数多$64-36=28$.

4. B　由$\frac{1}{x}\geqslant1$，得$0<x\leqslant1$，则“$0\leqslant x\leqslant1$”是“$\frac{1}{x}\geqslant1$”的必要不充分条件.

5. A　易证$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数. 因为$f(x)$在$(-1,1)$内有零点，

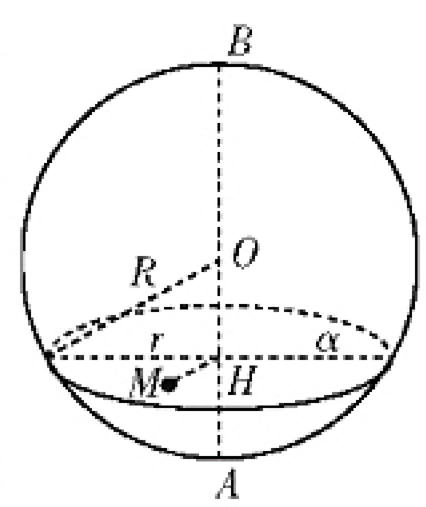
所以$\begin{cases}f(-1)=-1-4+a<0,\\f(1)=1+4+a>0,\end{cases}$解得$-5<a<5$.

6. D　由$|FA|=7$，$|FB|=\frac{5}{2}$，可得$x_A+1=7$，$x_B+1=\frac{5}{2}$，即$x_A=6$，$x_B=\frac{3}{2}$，

所以$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{x_A-x_B}{x_B-x_C}=\frac{6-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=3$.

7. B　因为$f(x)=2\cos x\cos\varphi+2\sin x\sin\varphi+\cos x=2\sin\varphi\sin x+(2\cos\varphi+1)\cos x=\sqrt{(2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi+1)^2}\cdot\sin(x+\alpha)$，所以$\sqrt{(2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi+1)^2}=\sqrt{7}$，所以$\cos\varphi=\frac{1}{2}$，则$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

8. C　如图，设α截得的截面圆的半径为r，球O的半径为R，因为$AH:HB=1:2$，所以$OH=\frac{1}{3}R$. 由勾股定理得$R^2=r^2+OH^2$，由题意得$\pi r^2=\pi$，$r=1$，所以$R^2=1+(\frac{1}{3}R)^2$，解得$R^2=\frac{9}{8}$.



此时过点M作球O的截面，若要所得的截面面积最小，只需所求截面圆的半径最小. 设球心O到所求截面的距离为d，所求截面的半径为r'，则$r'=\sqrt{R^2-d^2}$，所以只需球心O到所求截面的距离d最大即可，而当且仅当OM与所求截面垂直时，球心O到所求截面的距离d最大，即$d_{\max}=OM=\sqrt{(\frac{1}{3}R)^2+MH^2}=\frac{1}{2}$，所以$r'_{\min}=\sqrt{\frac{9}{8}-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.

9. BCD　当$a_n=0$时，满足$a_5^2=a_3a_7$，但$\{a_n\}$不是等比数列，则A错误. 由等比数列的性质可知$a_5^2=a_3a_7$，则B正确. 由$S_n=3^n-1$，得$S_{n-1}=3^{n-1}-1$，则$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times3^{n-1}(n\geqslant2)$，当$n$

$=1$ 时，$a_1=S_1=2$，则 $a_n=2\times 3^{n-1}$，从而可知$\{a_n\}$是等比数列，则 C 正确. 由 $S_n=3^n+a$，得 $a_1=3+a$，$a_2=6$，$a_3=18$. 由等比数列的性质可知 $a_2^2=a_1a_3$，即 $6^2=18(3+a)$，解得 $a=-1$，则 D 正确.

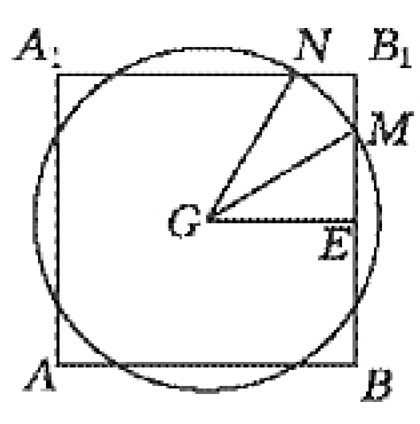
10. BCD　由题意可得圆 C 的圆心坐标为$(1,-2)$，半径为 3，直线 l 过定点$(1,1)$，则 A 错误，B 正确. 因为点$(1,1)$在圆 C 上，所以直线 l 与圆 C 一定有公共点，则 C 正确. 圆 C 的圆心到直线 l 的距离的最大值是 $\sqrt{(1+2)^2+(1-1)^2}=3$，则 D 正确.

11. BCD　设切点为$(x_0,2+\ln x_0)$，因为$(2+\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以 $a=\frac{1}{x_0}$. 又因为切点$(x_0,2+\ln x_0)$在直线 $y=ax+b$ 上，所以 $2+\ln x_0=ax_0+b=1+b$，解得 $b=1+\ln x_0$，所以 $a+b=1+\frac{1}{x_0}+\ln x_0$. 令 $g(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，易知 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=2$，故 $a+b$ 的取值范围为$[2,+\infty)$.

12. ACD　对于 A，取 AB_1 的中点 G，连接 FG，DE(图略)，易知 G 也是 DE 的中点，在$\triangle AB_1F$ 中，因为 $FA=FB_1$，G 为 AB_1 的中点，所以 $FG\perp AB_1$. 在$\triangle DEF$ 中，因为 $FD=FE$，G 为 DE 的中点，所以 $FG\perp DE$. 又因为 AB_1，$DE\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $FG\perp$平面 ABB_1A_1. 又因为 $FG\subset$平面 AB_1F，所以平面 $AB_1F\perp$平面 ABB_1A_1，A 正确.

对于 B，设点 B_1 到平面 BCD 的距离为 h，易知 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5-1}=2$，$S_{\triangle BB_1D}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，因为 $V_{B_1-BCD}=V_{C-BB_1D}$，所以$\frac{1}{3}\times 2h=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{3}$，解得 $h=\sqrt{3}$，B 错误.

对于 C，取 BC 的中点 Q，连接 AQ(图略)，易知 $AQ\perp BC$. 以 A 为坐标原点，向量$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AA_1}$的方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,1)$，$B_1(1,\sqrt{3},2)$，设 $P(-1,\sqrt{3},t)$，$0\leqslant t\leqslant 2$，则$\overrightarrow{DB_1}=(1,\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{DP}=(-1,\sqrt{3},t-1)$. 设 DB_1 与 DP 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{t+1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{t^2-2t+5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\sqrt{1+\frac{4(t-1)}{(t-1)^2+4}}$. 令 $u=t-1(-1\leqslant u\leqslant 1)$，则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\sqrt{1+\frac{4u}{u^2+4}}$，当 $u=0$，即 $t=1$ 时，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$；当 $0<u\leqslant 1$，即 $1<t\leqslant 2$ 时，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\sqrt{1+\frac{4}{u+\frac{4}{u}}}$，可知$\frac{\sqrt{5}}{5}<\cos\theta\leqslant\frac{3}{5}$；当$-1\leqslant u<0$，即 $0\leqslant t<1$ 时，可知$\frac{1}{5}\leqslant\cos\theta<\frac{\sqrt{5}}{5}$. 综上，$DB_1$ 与 DP 所成角的余弦值的取值范围为$[\frac{1}{5},\frac{3}{5}]$，C 正确.



对于 D，由 A 选项中的结论知 $FG\perp$平面 ABB_1A_1，$FG=\sqrt{3}$. 又因为球面的半径为$\frac{\sqrt{39}}{3}$，所以以 F 为球心，$\frac{\sqrt{39}}{3}$为半径的球面与侧面 ABB_1A_1 的交线(圆的一部分)的半径为$\sqrt{(\frac{\sqrt{39}}{3})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 如图，$GM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$GE=$

1，所以 $\cos\angle MGE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$\angle MGE=\frac{\pi}{6}$. 由圆与正方形的对称性知$\angle MGN=\frac{\pi}{6}$，所以球面与侧面 ABB_1A_1 的交线长为$\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{6}\times4=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$，D 正确.

13. $\sqrt{3}$　因为$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，所以 $4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$，则$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3$，故$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

14. 1　因为 $f(x)=\log_3(x+\sqrt{x^2+9})-a$，所以 $f(-x)=\log_3(-x+\sqrt{x^2+9})-a$. 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=0$，即 $\log_3(x+\sqrt{x^2+9})-a+\log_3(-x+\sqrt{x^2+9})-a=0$，所以 $2a=\log_3 9=2$，解得 $a=1$，则 $f(4a)=\log_3(4+\sqrt{4^2+9})-1=1$.

15. $\frac{22}{35}$　从这 7 项项目中随机抽取 3 项的情况有 $C_7^3=35$ 种，抽取的 3 项属同一类的情况有 $C_3^3=1$ 种，抽取的 3 项包含三类的情况有 $C_3^1C_2^1C_2^1=12$ 种，则符合条件的情况有 $35-1-12=22$ 种，故所求概率为$\frac{22}{35}$.

16. $\frac{\sqrt{10}}{9}$　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为$|AB|=3|AF|$，所以$\frac{|y_1|}{|y_2|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{2}$，所以 $y_2=-2y_1$. 联立$\begin{cases}x-3y+c=0,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 整理得$(a^2+9b^2)y^2-6b^2cy-b^4=0$，则 $y_1+y_2=-y_1=\frac{6b^2c}{a^2+9b^2}$，$y_1y_2=-\frac{b^4}{a^2+9b^2}$，从而 $-2\cdot(-\frac{6b^2c}{a^2+9b^2})^2=-\frac{b^4}{a^2+9b^2}$，整理得 $81c^2=10a^2$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{9}$.

17. 解：(1)因为 $\cos 2B=1-3\cos B$，所以 $2\cos^2B-1=1-3\cos B$，………………………… 1 分

所以 $2\cos^2B+3\cos B-2=0$，所以$(2\cos B-1)(\cos B+2)=0$，………………………… 2 分

则 $\cos B=\frac{1}{2}$或 $\cos B=-2$(舍去). ………………………………………………… 3 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………… 4 分

(2)因为$\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=6\sqrt{3}$，则 $ac=24$. ……………… 6 分

由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-3ac$，………………………… 7 分

则$(2\sqrt{7})^2=(a+c)^2-3\times24$，即$(a+c)^2=100$，解得 $a+c=10$. ……………………… 9 分

故$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2\sqrt{7}+10$. ……………………………………………… 10 分

18. 解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d，

则$\begin{cases}a_3+a_7=2a_1+8d=18,\\ a_5+a_8=2a_1+11d=24,\end{cases}$解得 $a_1=1$，$d=2$. ……………………………………… 3 分

故 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可得 $b_n=(-1)^n(2n-1)(2n+1)=(-1)^n(4n^2-1)$, ………………………… 7 分

则 $b_{2n-1}+b_{2n}=-[4(2n-1)^2-1]+[4(2n)^2-1]=16n-4$, ………………………… 9 分

故 $S_{2n}=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{2n-1}+b_{2n})=12+28+\cdots+(16n-4)$

$=\dfrac{(12+16n-4)n}{2}=8n^2+4n$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)记事件 A 表示从该地中学生中随机抽取 1 人,被抽取的这名中学生喜欢羽毛球,事件 B 表示从该地中学生中随机抽取 1 人,被抽取的这名中学生喜欢乒乓球,

则 $P(A)=(0.3+0.3)\times0.6+(0.3+0.15)\times0.4=0.54$, ………………………… 2 分

$P(AB)=0.3\times0.6+0.15\times0.4=0.24$, ………………………………………… 4 分

故所求的概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.24}{0.54}=\dfrac{4}{9}$. ………………………………… 6 分

(2)由(1)可知从该地中学生中随机抽取 1 人,被抽取的这名中学生既喜欢羽毛球,又喜欢乒乓球的概率 $p=0.24$,则 $X\sim B(100,0.24)$, ………………………………………… 8 分

从而 $P(X=k)=C_{100}^{k}\cdot0.24^k\cdot0.76^{100-k}(k=0,1,2,3,\cdots,100)$, ………………… 10 分

故 $E(X)=100\times0.24=24$. ………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明:取 SA 的中点 F,连接 CF,EF,CD.

因为 C,D 为圆弧 AB 的两个三等分点,所以 $CD/\!/AB,CD=\dfrac{1}{2}AB$. ……………………… 2 分

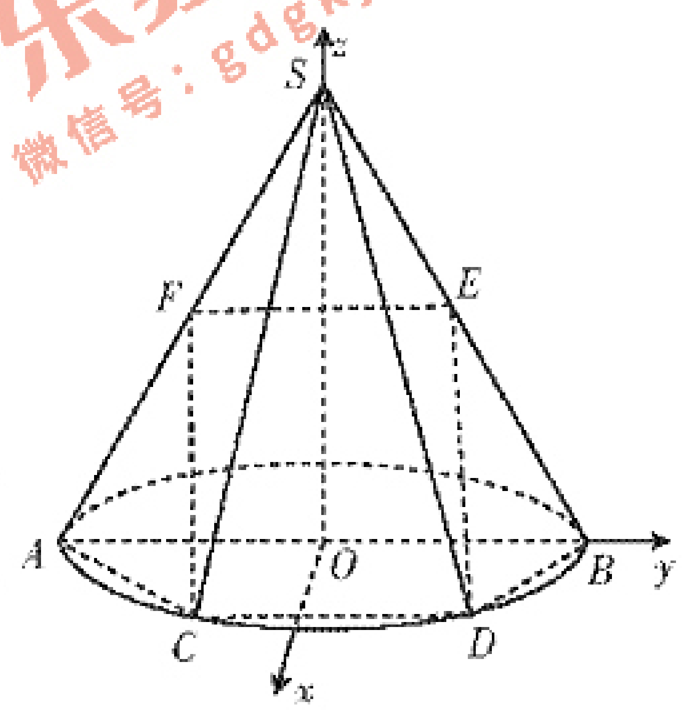
因为 E,F 分别为 SB,SA 的中点,所以 $EF/\!/AB,EF=\dfrac{1}{2}AB$, …………………………… 3 分

则 $CD/\!/EF,EF=CD$,从而四边形 $CDEF$ 为平行四边形,

故 $DE/\!/CF$. ………………………………………………………………………… 5 分

因为 $DE\not\subset$平面 SAC,$CF\subset$平面 SAC,所以 $DE/\!/$平面 SAC. ………………………… 6 分

(2)解:以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OS}$的方向分别为 y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 $AB=SA=4$,所以 $A(0,-2,0),B(0,2,0),C(\sqrt{3},-1,0)$,$D(\sqrt{3},1,0),S(0,0,2\sqrt{3})$,

则$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{AS}=(0,2,2\sqrt{3}),\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},-1,0),\overrightarrow{BS}=(0,-2,2\sqrt{3})$. ……………………………………… 8 分

设平面 SAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}x_1+y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AS}=2y_1+2\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$,得 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},1)$. ………………………… 9 分

设平面 SBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{3}x_2-y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BS}=-2y_2+2\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$. ………………………… 10 分

设平面 SAC 与平面 SBD 所成锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{5}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由题可得 $\begin{cases}\dfrac{3}{a^2}-\dfrac{16}{b^2}=1,\\ \dfrac{c}{a}=3,\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=2\sqrt{2}$. ………………………… 3 分

故 C 的标准方程为 $y^2-\dfrac{x^2}{8}=1$. ……………………………………………… 4 分

(2)由题意可知直线 l 的斜率存在，设直线 $l:y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ y^2-\dfrac{x^2}{8}=1,\end{cases}$ 整理得 $(8k^2-1)x^2+16kmx+8m^2-8=0$，………………………… 5 分

则 $\Delta=(16km)^2-4(8k^2-1)(8m^2-8)=0$，即 $8k^2+m^2=1$. ……………………… 6 分

由(1)可知 C 的渐近线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$ 和 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$. ……………………………… 7 分

不妨设直线 l 与直线 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$ 的交点为 A，与直线 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$ 的交点为 B.

联立 $\begin{cases}y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{4m}{\sqrt{2}-4k},\\ y=\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2}-4k},\end{cases}$ 即 $A\left(\dfrac{4m}{\sqrt{2}-4k},\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2}-4k}\right)$. ……………………… 8 分

联立 $\begin{cases}y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{4m}{\sqrt{2}+4k},\\ y=\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2}+4k},\end{cases}$ 即 $B\left(-\dfrac{4m}{\sqrt{2}+4k},\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2}+4k}\right)$. ……………… 9 分

由 $\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{4m}{\sqrt{2}-4k},\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2}-4k}\right)$，$\overrightarrow{OB}=\left(-\dfrac{4m}{\sqrt{2}+4k},\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2}+4k}\right)$，……………………… 10 分

得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{4m}{\sqrt{2}-4k}\cdot\left(-\dfrac{4m}{\sqrt{2}+4k}\right)+\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2}-4k}\cdot\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2}+4k}=\dfrac{7m^2}{8k^2-1}$. ……………………… 11 分

因为 $8k^2+m^2=1$，所以 $m^2=1-8k^2$，所以 $\dfrac{7m^2}{8k^2-1}=-7$，即 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-7$. ………… 12 分

22. (1)解：$f'(x)=1-3x^2$，令 $f'(x)=0$，可得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………… 1 分

令 $f'(x)>0$，可得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，……………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递减. ……… 3 分

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，$f(x)$ 的极小值为 $f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$. …………… 5 分

(2)证明：由 $mf(\sin\alpha)+nf(\cos\alpha)=\tan\frac{\pi}{6}$，可得 $m\cos^2\alpha\sin\alpha+n\sin^2\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $m\cos\alpha+n\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3\sin\alpha\cos\alpha}$. …………………………………………………… 7 分

由对称性，不妨设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{4}]$，则 $m\cos\alpha+n\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3\sin\alpha\cos\alpha}\leqslant(m+n)\cos\alpha$，当且仅当 $\sin\alpha=\cos\alpha$ 时，等号成立，…………………………………………………………………………………… 8 分

所以 $m+n\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{3(\sin\alpha-\sin^3\alpha)}$. ………………………………………… 9 分

由(1)可知 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上的最大值为 $f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，………………………………… 10 分

所以 $0<\sin\alpha-\sin^3\alpha\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$，$\frac{\sqrt{3}}{3(\sin\alpha-\sin^3\alpha)}\geqslant\frac{3}{2}$，当且仅当 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立.

因为等号不能同时取到，所以 $m+n>\frac{3}{2}$. ……………………………………………………… 12 分