

名校联考联合体 2023 年秋季高一年级期末考试

数学参考答案

一、二、选择题:1~8 题为单项选择题,每小题 5 分,共 40 分;9~12 题为多项选择题,每小题 5 分,共 20 分,每题有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	D	B	A	A	C	A	AD	ABC	ABC	ACD

1. D 【解析】 $M = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $S = \{0, 1\}$. $\therefore M \cap S = \{0, 1\}$.

3. D 【解析】由题意得 $f(x) \xrightarrow{\text{向右平移 } \frac{\pi}{6} \text{ 个单位长度}} y = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

4. B 【解析】由题意得, $\log_2 0.1 < 0$, $0 < 0.1^{\pi} < 1$, $\tan \frac{5}{12}\pi > \tan \frac{\pi}{4} = 1$.

5. A 【解析】由题意得 $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{e^x} = \frac{x(x-4)}{e^x}$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 排除 D; 当 $x > 4$ 时, $f(x) > 0$, 排除 C; 取特殊值 $f(10) = \frac{60}{e^{10}}$, 排除 B, 故选 A.

6. A 【解析】直线 $y = 3x$ 在第一象限和第三象限, 由三角函数的定义, 分别取点 $(1, 3)$, $(-1, -3)$ 可得 $\sin \alpha = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

7. C 【解析】由二分法的定义, 可得正零点所在区间不断缩小, $(1, 1.5) \rightarrow (1, 1.25) \rightarrow (1.125, 1.25)$ 时的区间长度为 $|1.125 - 1.25| = 0.125 > 0.1$, 故没有达到精确的要求, 应该接着计算 $f\left(\frac{1.125 + 1.25}{2}\right) = f(1.1875)$ 的值.

8. A 【解析】由题意得, 函数 $f(x)$ 的增区间为 $-\pi + 2k\pi \leq \omega x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leq \omega x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
 $(k \in \mathbb{Z})$. 显然 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right) \subseteq \left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$. 于是 $\begin{cases} -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leq \frac{\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \geq \frac{3\pi}{4}, \end{cases}$ 解得 $-\frac{9}{4} + 6k \leq \omega \leq \frac{1}{3} + \frac{8}{3}k$
 $(k \in \mathbb{Z})$. 又 $\omega > 0$, 于是 $0 < \omega \leq \frac{1}{3}$.

9. AD 【解析】显然如果 $a > b > 0$, 那么 $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$, 选项 B 错误; 若 $-1 < a < 5$, $2 < b < 3$, 则 $-3 < -b < -2$, 于是 $-4 < a - b < 3$, 选项 C 错误.

11. ABC 【解析】由基本不等式得, $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立. 故选项 A 正确;

$\because a + b = 2, \therefore b = 2 - a$, 且 $0 < a < 2$, 则 $2^{a-b} = 2^{2a-2} \in \left(\frac{1}{4}, 4\right) \subseteq (0, 4)$, 故选项 B 正确;

$2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^a \cdot 2^b} = 2\sqrt{2^{a+b}} = 4$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立, 故选项 C 正确;

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq \frac{1}{2} \left(2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}\right) = 2$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立, 故选项 D 错误.

12. ACD 【解析】由题意得, $\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2\pi \Rightarrow \omega_1 = 1$, 又由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = A$, 可得 $\frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3} +$

$2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 又 $\pi < \varphi < 2\pi$, 所以 $\varphi = \frac{5\pi}{3}$, $f(0) = 1 \Rightarrow A \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow A = 2$, 故选项 A 正确;

若 $\omega_1 = \omega_2$, 则 $g(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left[\left(x + \frac{5\pi}{3}\right) - \frac{3\pi}{2}\right] = 2\cos\left(x + \frac{5\pi}{3}\right) = f(x)$, 故选项 B 错误;

若 $\omega_2 = 2$, $g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, $g(x-a) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6} - 2a\right)$ 为偶函数, 则 $\frac{\pi}{6} - 2a = \frac{\pi}{2} - k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

即 $a = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 故选项 C 正确;

令 $t = \omega_2 x + \frac{\pi}{6}$, 则 $t \in \left(\frac{\pi}{6}, \omega_2 \pi + \frac{\pi}{6}\right)$, 即 $y = \sin t$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \omega_2 \pi + \frac{\pi}{6}\right)$ 上有两个零点,

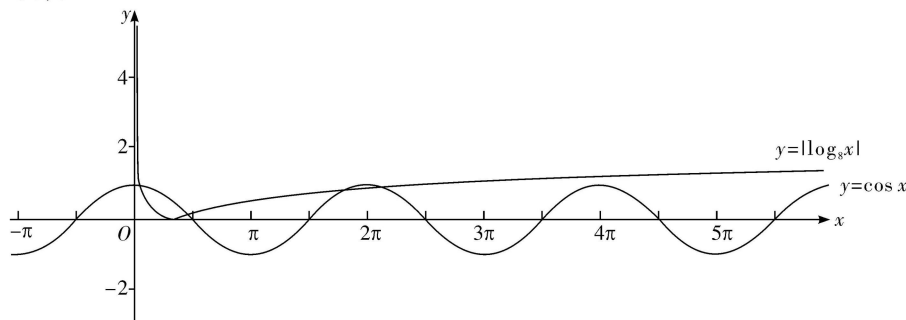
$2\pi < \omega_2 \pi + \frac{\pi}{6} \leq 3\pi \Rightarrow \omega_2 \in \left(\frac{11}{6}, \frac{17}{6}\right]$, 故选项 D 正确.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $-\tan \alpha$ 【解析】原式 $= -\tan \alpha$.

14. $3\pi - 6$ 【解析】由图得, $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形, $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times r^2 = 3\pi$, 得 $r = 2\sqrt{3}$. $S_{\text{弧田}} = S_{\text{扇形}} - S_{\triangle OAB} = 3\pi - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 3\pi - 6$.

15. 4 【解析】函数 $y = |\log_8 x| - \cos x$ 的零点个数转化为 $y = |\log_8 x|$ 与 $y = \cos x$ 两个函数图象的交点个数, 利用数形结合可得,



两个函数图象有四个交点, 所以函数 $y = |\log_8 x| - \cos x$ 有 4 个零点.

16. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 【解析】 $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+4x^2}+2x}{e}\right) = \ln(\sqrt{1+4x^2}+2x) - 1$, 令 $g(x) = \ln(\sqrt{1+4x^2}+2x)$, 显然可得 $g(x)$ 为奇函数, 且在 $\mathbb{R}$ 上单调递增. $f(a+1) + f(3a+1) + 2 > 0 \Leftrightarrow g(a+1) + g(3a+1) > 0 \Leftrightarrow g(3a+1) > -g(a+1) = g(-a-1)$, 于是 $3a+1 > -a-1 \Rightarrow a > -\frac{1}{2}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】由 $1 \leq 2^x \leq 64$ 可得 $0 \leq x \leq 6$,

(1) 若 $A \cap B = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, 则 $2+2m=4$, 且 $1-m \leq 0$, 解得 $m=1$ 5 分

(2) 因为“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的充分不必要条件, 所以 $B \subsetneq A$ 6 分

所以有 $\begin{cases} 1-m < 0, \\ 2+2m > 6, \end{cases}$ 解得 $m > 2$; 7 分

② 当 $1-m=0$ 时, 即 $m=1$ 时, $2+2m=4$, 不符合题意;

③ 当 $2+2m=6$ 时, 即 $m=2$ 时, $1-m=-1$, 符合题意. 9 分

综上可知 $m \geq 2$ 10 分

18. 【解析】(1) 由题意可知, -1 和 3 是方程 $ax^2 - 2ax - 3 = 0$ 的两根,

所以 $a \cdot (-1)^2 - 2a \cdot (-1) - 3 = 0$, 解得 $a=1$ 4 分

(2) 由题可得 $ax^2 - 2ax - 3 < x - 1$, 即 $ax^2 - (2a+1)x - 2 < 0$ 对一切实数 x 恒成立,

当 $a=0$ 时, 不等式化为 $-x-2 < 0$, 不符合题意; 5 分

当 $a \neq 0$ 时, 有 $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta = (2a+1)^2 + 8a < 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{-3-2\sqrt{2}}{2} < a < \frac{-3+2\sqrt{2}}{2}$,

综上可知, 实数 a 的取值范围为 $\frac{-3-2\sqrt{2}}{2} < a < \frac{-3+2\sqrt{2}}{2}$ 12 分

19. 【解析】(1) 由 $\frac{2\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = 2$, 可得 $\frac{2 - \tan \alpha}{\tan \alpha - 1} = 2$, 解得 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ 4 分

(2) 法一: $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1} = \frac{24}{25}$ 8 分



$$\text{法二: 由 } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5}, \\ \cos \alpha = \frac{3}{5}, \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \end{cases} \quad \text{且 } \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0, \text{ 解得 } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5}, \\ \cos \alpha = \frac{3}{5}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(3) \tan \beta = \tan[(\alpha + \beta) - \alpha] = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \alpha},$$

$$\text{因为 } \cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \sin(\alpha + \beta) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{又因为 } \alpha, \beta \text{ 均为锐角, 所以 } 0 < \alpha + \beta < \pi, \text{ 而 } \cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0,$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi, \text{ 故 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \tan(\alpha + \beta) = -2,$$

$$\text{所以 } \tan \beta = \tan[(\alpha + \beta) - \alpha] = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \alpha} = \frac{-2 - \frac{4}{3}}{1 + (-2) \times \frac{4}{3}} = 2. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$20. \text{【解析】(1) 由 } 1.3 = \frac{1}{2} \log_3 \frac{2700}{100} - \lg x_0 \text{ 解得, } \lg x_0 = 0.2, \text{ 所以 } x_0 = 10^{\frac{1}{5}}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设乙鲑鱼耗氧量偏差为 } x_0, \text{ 乙鲑鱼的耗氧量为 } x_2,$$

$$\text{则甲鲑鱼耗氧量偏差为 } 10x_0, \text{ 甲鲑鱼的耗氧量为 } x_1,$$

$$\text{因为甲、乙两条鲑鱼游速相同, 所以有 } \frac{1}{2} \log_3 \frac{x_1}{100} - \lg 10x_0 = \frac{1}{2} \log_3 \frac{x_2}{100} - \lg x_0, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{化简得, } \frac{1}{2} \log_3 \frac{x_1}{100} - \lg 10 - \lg x_0 = \frac{1}{2} \log_3 \frac{x_2}{100} - \lg x_0,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \log_3 \frac{x_1}{100} - \frac{1}{2} \log_3 \frac{x_2}{100} = 1, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \log_3 \frac{x_1}{x_2} = 2, \text{ 所以 } \frac{x_1}{x_2} = 9.$$

$$\text{所以甲鲑鱼的耗氧量是乙鲑鱼耗氧量的 9 倍.} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{【解析】} f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 + 2\sqrt{3} \sin x \cos x$$

$$= 2\cos^2 x - 1 + 2\sqrt{3} \sin x \cos x$$

$$= \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x\right)$$

$$= 2\left(\sin \frac{\pi}{6} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x\right)$$

$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right). \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(1) \text{ 由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 可得 } \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{即 } f(x) \text{ 的单调递减区间为 } \left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi,$$

$$\text{所以 } -\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1, \text{ 所以 } -1 \leq 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ 时, 即 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } [f(x)]_{\max} = 2, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ 时, 即 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } [f(x)]_{\min} = -1. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$



(3)由题意可得, $f(x_1)=f(x_2)=\frac{6}{5}$.

即 $2\sin(2x_1+\frac{\pi}{6})=2\sin(2x_2+\frac{\pi}{6})=\frac{6}{5}$, 所以 $\sin(2x_1+\frac{\pi}{6})=\sin(2x_2+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$,

所以 $2x_1+\frac{\pi}{6}+2x_2+\frac{\pi}{6}=\pi$, 即可得 $x_1+x_2=\frac{\pi}{3}$, 9 分

所以 $\sin(x_1-x_2)=\sin[x_1-(\frac{\pi}{3}-x_1)]=\sin(2x_1-\frac{\pi}{3})$,

因为 $\sin(2x_1+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$, 可设 $2x_1+\frac{\pi}{6}=t$, 则 $\sin t=\frac{3}{5}$, $2x_1=t-\frac{\pi}{6}$,

所以 $\sin(x_1-x_2)=\sin(2x_1-\frac{\pi}{3})=\sin(t-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=\sin(t-\frac{\pi}{2})=-\cos t$,

因为 $\sin t=\frac{3}{5}$, 且 $2x_1+\frac{\pi}{6}=t\in(0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\cos t=\frac{4}{5}$,

所以 $\sin(x_1-x_2)=-\cos t=-\frac{4}{5}$ 12 分

22.【解析】(1)由 $g(x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}$, 可知 $a\neq 0$,

又 $g(x)$ 为偶函数, 所以有 $g(1)=g(-1)$, 即 $\frac{e}{e^a-1}=\frac{-e^{-1}}{e^{-a}-1}$,

化简得 $\frac{e}{e^a-1}=\frac{e^{-1}}{1-e^{-a}}$, 即 $\frac{e}{e^a-1}=\frac{e^{a-1}}{e^a-1}$,

所以 $e=e^{a-1}$, 得 $a=2$ 4 分

经检验, 当 $a=2$ 时, $g(x)=g(-x)$ 对任意 $x\neq 0$ 成立, 即满足 $g(x)$ 为偶函数. 故所求 a 的值为 2. 5 分

(2)由(1)可知 $g(x)=\frac{xe^x}{e^{2x}-1}$, 即方程 $\frac{(m-1)x}{2m\cdot e^x-2}=\frac{xe^x}{e^{2x}-1}$ 有且只有一个实数解,

显然 $x\neq 0$, 所以上述方程可化为 $\frac{m-1}{2m\cdot e^x-2}=\frac{e^x}{e^{2x}-1}$,

即方程 $(m+1)e^{2x}-2e^x+m-1=0$ 有且只有一个实数解,

令 $e^x=t(t>0$ 且 $t\neq 1)$,

则关于 t 的方程 $(m+1)t^2-2t+m-1=0$ 有且只有一个不为 1 和 $\frac{1}{m}$ 的正根,

$\Delta=4-4(m+1)(m-1)=8-4m^2$,

①当 $\Delta=0$ 时, $m=\pm\sqrt{2}$.

(i)若 $m=\sqrt{2}$, 则方程化为 $(\sqrt{2}+1)t^2-2t+\sqrt{2}-1=0$,

此时方程的解为 $t=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, 符合题意.

(ii)若 $m=-\sqrt{2}$, 则方程化为 $(-\sqrt{2}+1)t^2-2t-\sqrt{2}-1=0$,

此时方程的解为 $t=\frac{1}{-\sqrt{2}+1}$, 不符合题意, 故舍去.

②当 $\Delta>0$ 时, 需满足 $\begin{cases} \Delta>0, \\ t_1t_2<0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 8-4m^2>0, \\ \frac{m-1}{m+1}<0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}, \\ -1<m<1. \end{cases} \Rightarrow -1<m<1$.

当 $t=1$ 时, 即 1 为方程 $(m+1)t^2-2t+m-1=0$ 的解时, $m=1$.

当 $t=\frac{1}{m}$ 时, $(m-1)^2(m+1)=0$, $m=\pm 1$.

所以当方程有两根, 有且只有一个不为 1 和 $\frac{1}{m}$ 的正根时, $-1<m<1$.

综上所述, 当 $-1<m<1$ 或 $m=\sqrt{2}$ 时, 方程 $f(x)=g(x)$ 有且只有一个实数解. 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线