第 38 届全国中学生物理竞赛复赛（扬州）理论考试

参考解答

一、

（1）设斜面 M 的加速度为 a（向右为正），滑块 m 相对斜面运动的位移为 x（向下为正），则 m 相对 M 的加速度为 $\ddot{x}$．在地面系中，M 和 m 整体水平方向有

$$Ma + m(a + \ddot{x}\cos\theta) = 0 \qquad 4\text{ 分①}$$

可得

$$a = -\frac{m\cos\theta}{M+m}\ddot{x} \qquad 4\text{ 分②}$$

在 M 参考系中，m 沿斜面方向的动力学方程（引入水平向左的惯性力 ma）

$$mg\sin\theta - kx - ma\cos\theta = m\ddot{x} \qquad 4\text{ 分③}$$

将②式代入③式，得

$$mg\sin\theta - kx = \frac{m(M + m\sin^2\theta)}{M+m}\ddot{x} \qquad 4\text{ 分④}$$

由此式可看出 m 相对 M 做简谐振动，振动周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(M+m\sin^2\theta)}{(M+m)k}} \qquad 4\text{ 分⑤}$$

（注：当 $\theta = 0$ 时，$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mM}{(M+m)k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$；当 $\theta = 90^\circ$ 时，$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$）

（2）由④式可得

$$-k\left(x - \frac{mg\sin\theta}{k}\right) = \frac{m(M+m\sin^2\theta)}{M+m}\frac{d^2}{dt^2}\left(x - \frac{mg\sin\theta}{k}\right) \qquad 2\text{ 分⑥}$$

此式的解为

$$x - \frac{mg\sin\theta}{k} = A\cos(\omega t + \varphi),\quad \omega = \sqrt{\frac{(M+m)k}{m(M+m\sin^2\theta)}} \qquad 4\text{ 分⑦}$$

结合初始条件，即 $t = 0$ 时

$$x(0) = 0,\quad \dot{x}(0) = 0 \qquad 2\text{ 分⑧}$$

可得

$$A = \frac{mg\sin\theta}{k} \qquad 2\text{ 分⑨}$$

$$\varphi = \pi \qquad 2\text{ 分⑩}$$

所以

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mg\sin\theta}{k} + \frac{mg\sin\theta}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{(M+m)k}{m(M+m\sin^2\theta)}}t + \pi\right) \\ &= \frac{mg\sin\theta}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{(M+m)k}{m(M+m\sin^2\theta)}}t\right) \end{aligned} \qquad 4\text{ 分⑪}$$

代入②式可得

$$a(t) = -\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}\cos\sqrt{\frac{(M+m)k}{m(M+m\sin^2\theta)}}t \qquad 4\text{ 分⑫}$$

二、

（1）太阳单位时间辐射出的总能量

$$P_S=\sigma T_S^4\cdot 4\pi R_S^2$$ 4 分①

距离太阳 r 处的太阳帆上单位时间接收到的能量

$$P=\frac{\pi R^2}{4\pi r^2}P_S$$ 4 分②

太阳帆受到的光压力

$$F_\gamma=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{2\Delta E/c}{\Delta t}=2\frac{P}{c}=\frac{2\pi R^2\sigma T_S^4R_S^2}{c}\frac{1}{r^2}$$ 4 分③

卫星受到的合力

$$F(r)=-G\frac{Mm}{r^2}+F_\gamma=-(GMm-\frac{2\pi R^2\sigma T_S^4R_S^2}{c})\frac{1}{r^2}=-\frac{\alpha}{r^2}$$ 4 分④

（2）结合题中数据

$$\alpha=GMm-\frac{2\pi R^2\sigma T_S^4R_S^2}{c}>0$$ 2 分⑤

所以卫星受到的合力是平方反比吸引力，对应的势能

$$E_{\rm p}(r)=-\frac{\alpha}{r}$$ 2 分⑥

太阳帆张开前，卫星到太阳的距离为 r_0，卫星运行周期为 $T_0=1$ 年，卫星运行速度为 v_0，则

$$G\frac{Mm}{r_0^2}=m\frac{v_0^2}{r_0}=m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2r_0$$ 2 分⑦

太阳帆张开后，卫星的机械能

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{\alpha}{r_0}=\frac{GMm}{2r_0}-\frac{\alpha}{r_0}<0$$ 4 分⑧

所以卫星的运动轨迹是

椭圆，轨迹闭合 4 分⑨

由椭圆轨道的机械能公式

$$E=\frac{GMm}{2r_0}-\frac{\alpha}{r_0}=-\frac{2\alpha-GMm}{2r_0}=-\frac{\alpha}{2a}$$ 4 分⑩

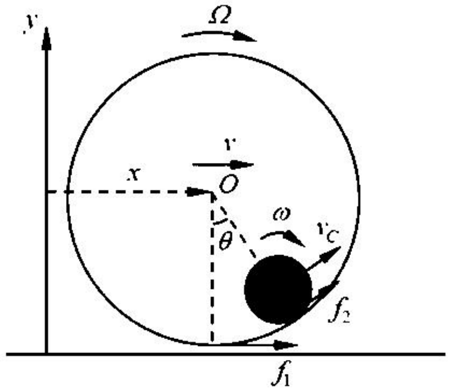
可得椭圆轨道的半长轴

$$a=\frac{\alpha}{2\alpha-GMm}r_0$$ 2 分⑪

由椭圆轨道的周期公式可得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\alpha/m}}=1.845T_0=1.845\text{年}$$ 4 分⑫

三、



（1）圆筒中心 O 向右运动的速度 $v=\dot{x}$，因为圆筒在地面上无滑滚动，所以圆筒绕中心 O 转动的角速度

$$\Omega=\frac{v}{R}=\frac{\dot{x}}{R} \qquad 2\text{分}①$$

小圆柱中心 C 相对圆筒中心 O 的速度 $v_C=\dot{\theta}(R-r)$，因为小圆柱在圆筒内无滑滚动，所以小圆柱绕中心 C 转动的角速度

$$\omega=\frac{v_C+\Omega R}{r}=\frac{\dot{\theta}(R-r)+\dot{x}}{r} \qquad 2\text{分}②$$

设圆筒受到地面的静摩擦力为 f_1，小圆柱受到圆筒的静摩擦力为 f_2，对系统有水平方向的动量定理

$$f_1=\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Mv+m(v+v_C\cos\theta)] \qquad 2\text{分}③$$

对圆筒有绕其质心轴 O 的角动量定理

$$-f_1R+f_2R=\frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MR^2\Omega) \qquad 2\text{分}④$$

对小圆柱有绕其质心轴 C 的角动量定理

$$-f_2r=\frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}mr^2\omega) \qquad 2\text{分}⑤$$

由③④⑤式结合①②式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(2M+\frac{3}{2}m)\dot{x}+m\dot{\theta}(R-r)(\frac{1}{2}+\cos\theta)]=0$$

即

$$(2M+\frac{3}{2}m)\dot{x}+m\dot{\theta}(R-r)(\frac{1}{2}+\cos\theta)=\text{常量} \qquad 2\text{分}⑥$$

释放时 $\dot{x}=0$、$\theta=90^\circ$、$\dot{\theta}=0$，小圆柱运动至最低点时 $\theta=0$，所以

$$(2M+\frac{3}{2}m)\dot{x}+\frac{3}{2}m\dot{\theta}(R-r)=0 \qquad 2\text{分}⑦$$

系统运动过程中有机械能守恒

$$mg(R-r)=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}MR^2\Omega^2+\frac{1}{2}m(v+v_C)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\omega^2 \qquad 2\text{分}⑧$$

将⑦式及①②式代入，解得

$$\dot{\theta}^2=\frac{4M+3m}{3M}\frac{g}{R-r} \qquad ⑨$$

在圆筒平动参考系中（当小圆柱运动到最低点时，圆筒水平方向受力为零，为惯性参考系），对小圆柱有质心运动定理

$$N-mg=ma_{Cn}=m\dot{\theta}^2(R-r) \qquad 2\text{分}⑩$$

解得小圆柱与圆筒间的压力

$$N=\frac{7M+3m}{3M}mg \qquad 2\text{分}⑪$$

（2）

（i）若 θ 为小量，则 $\sin\theta\approx\theta$、$\cos\theta\approx1$，由⑥式对时间求导可得

$$(2M+\frac{3}{2}m)\ddot{x}+\frac{3}{2}m\ddot{\theta}(R-r)=0 \qquad 2分⑫$$

在圆筒平动参考系中，对小圆柱有质心运动定理（引入水平向左的惯性力$m\ddot{x}$）

$$f_2-mg\sin\theta-m\ddot{x}\cos\theta=ma_{C_\tau}=m\ddot{\theta}(R-r) \qquad ⑬$$

将⑤式及②式代入并考虑到θ为小量可得

$$-g\theta=\frac{3}{2}\ddot{x}+\frac{3}{2}\ddot{\theta}(R-r) \qquad 2分⑭$$

⑫式及⑭式即为所求的关于x和θ的动力学方程组.

（ii）

①整体匀速运动模式：

要求$\ddot{x}=0$，由⑫式可知要求$\ddot{\theta}=0$，由⑭式可知要求$\theta=0$，所以初始条件应满足的关系为

$$\theta(0)=0,\quad \dot{\theta}(0)=0 \text{（}x(0)\text{和}\dot{x}(0)\text{任意）} \qquad 2分⑮$$

②往返振动模式：

要求x和θ应同步振动，由⑫式可得

$$\dot{x}=-\frac{3m}{4M+3m}\dot{\theta}(R-r) \qquad ⑯$$

所以初始条件应满足的关系为

$$\dot{x}(0)=-\frac{3m}{4M+3m}\dot{\theta}(0)(R-r) \text{（}x(0)\text{和}\theta(0)\text{任意）} \qquad 2分⑰$$

（iii）将⑫式代入⑭式可得

$$-g\theta=\frac{6M}{4M+3m}(R-r)\ddot{\theta} \qquad ⑱$$

可见θ做简谐振动，振动周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{6M}{4M+3m}\frac{R-r}{g}} \qquad 2分⑲$$

（3）系统的一般运动为整体匀速运动模式和往返振动模式的叠加，$x(t)$和$\theta(t)$的解可写为

$$\begin{cases}x(t)=at+b+A\cos(\omega t+\varphi)\\ \theta(t)=B\cos(\omega t+\varphi)\end{cases},\quad \omega=\sqrt{\frac{4M+3m}{6M}\frac{g}{R-r}} \qquad ⑳$$

由初始条件$\theta(0)=\theta_0$、$\dot{\theta}(0)=0$可得

$$B=\theta_0,\quad \varphi=0,\quad \text{即}\ \theta(t)=\theta_0\cos\omega t \qquad 4分㉑$$

由⑫式可得

$$A=-\frac{3m}{4M+3m}\theta_0(R-r) \qquad 2分㉒$$

由初始条件$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=v_0$可得

$$a=v_0,\quad b=-A=\frac{3m}{4M+3m}\theta_0(R-r)$$

$$\text{即}\ x(t)=v_0t+\frac{3m}{4M+3m}\theta_0(R-r)(1-\cos\omega t) \qquad 4分㉓$$

㉑式和㉓式即为所求的结果

$$\begin{cases}x(t)=v_0t+\frac{3m}{4M+3m}\theta_0(R-r)\left(1-\cos\sqrt{\frac{4M+3m}{6M}\frac{g}{R-r}}t\right)\\ \theta(t)=\theta_0\cos\sqrt{\frac{4M+3m}{6M}\frac{g}{R-r}}t\end{cases}$$

四、

（1）设电势分布为 $V(x)$，电子从阴极发出后，由动能定理

$$eV(x)=\frac{1}{2}mv^2(x)$$ 4 分①

设阴极和阳极之间形成稳定的电流 I，则

$$I=\rho(x)v(x)A$$ 2 分②

得到

$$\rho(x)=\frac{I}{v(x)A}=\frac{I}{A}\sqrt{\frac{m}{2eV(x)}}$$ 2 分③

设电场分布为 $E(x)$，则

$$E(x)=-\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$$ 2 分④

对 $x\sim x+\mathrm{d}x$ 的区域，由高斯定理

$$[E(x+\mathrm{d}x)-E(x)]A=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x)A\mathrm{d}x$$ 2 分⑤

得

$$\frac{\mathrm{d}E(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$ 2 分⑥

将④式和③式代入即

$$\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}=-\frac{I}{\varepsilon_0 A}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{-1/2}(x)$$ 4 分⑦

设 $V(x)=Cx^N$，代入⑦式后由 x 的次方相等可得 $N-2=-\frac{1}{2}N$，则

$$N=\frac{4}{3},\quad V(x)=Cx^{4/3}$$ ⑧

结合边界条件 $V(x=d)=V_0$ 可得

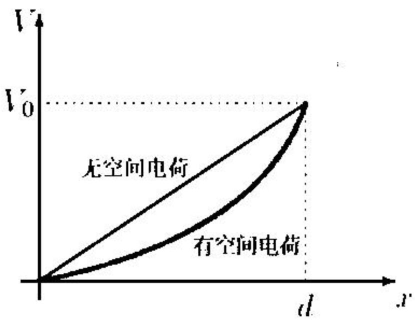
$$V(x)=V_0\left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$$ 4 分⑨

（用其他方法求解⑦式得到⑨式也可以）

没有空间电荷时，电势分布为

$$V(x)=V_0\frac{x}{d}$$ 2 分⑩

V—x 曲线图如下



2 分

（2）由①式可得速度分布

$$v(x)=\sqrt{\frac{2eV(x)}{m}}=\sqrt{\frac{2eV_0}{m}}\left(\frac{x}{d}\right)^{2/3}$$ 4 分⑪

由⑦式可得电荷密度分布

$$\rho(x)=-\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{4}{9}\frac{\varepsilon_0V_0}{d^2}\left(\frac{x}{d}\right)^{2/3}$$ 4 分⑫

（3）由②式，电流

$$I=\rho(x)v(x)A=-\frac{4\varepsilon_0A}{9d^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}V_0^{3/2}$$ 2 分⑬

所以

$$K=\frac{4\varepsilon_0A}{9d^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}，\quad n=\frac{3}{2}$$ 4 分⑭

五、

（1）正方形平行板电容器的电容

$$C=\frac{\varepsilon_0b^2}{d}$$ 2 分①

当有电流 I 流过半圆柱面金属板时，在圆柱内部区域产生的磁场为（类似螺线管）

$$B=\mu_0\frac{I}{b}$$ 2 分②

圆柱内部的磁通量

$$\Phi=B\pi a^2=\frac{\mu_0\pi a^2}{b}I$$ 2 分③

圆柱的自感系数

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0\pi a^2}{b}$$ 2 分④

整个电路等效为一个 LC 振荡电路，电路方程为

$$\frac{q_1}{C}-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-\frac{q_2}{C}=0$$ 2 分⑤

$$I=-\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}$$ 2 分⑥

$$q_1+q_2=Q_0$$ 2 分⑦

初始条件为 $t=0$ 时

$$q_1(0)=Q_0，\quad \dot{q}_1(0)=-I(0)=0$$ 2 分⑧

解得

$$q_1(t)=\frac{Q_0}{2}(1+\cos\omega t)$$ 2 分⑨

$$q_2(t)=\frac{Q_0}{2}(1-\cos\omega t)$$ 2 分⑩

其中

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC/2}}=\frac{c}{a}\sqrt{\frac{2d}{\pi b}}\quad\left(c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right)$$ ⑪

电荷 Q_0 首次完全由左侧电容器转移到右侧电容器所需的时间

$$t=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi a}{c}\sqrt{\frac{\pi b}{2d}}$$ 2 分⑫

（2）半圆柱面金属板上流过的电流

$$I(t)=-\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{Q_0}{2}\sin\omega t$$ ⑬

在圆柱内部区域产生的（匀强）磁场为

$$B(t)=\mu_0\frac{I(t)}{b}=\frac{\mu_0\omega Q_0}{2b}\sin\omega t=\frac{\mu_0 Q_0}{2b}\frac{c}{a}\sqrt{\frac{2d}{\pi b}}\sin\frac{c}{a}\sqrt{\frac{2d}{\pi b}}t$$ 4 分⑭

磁场能量密度

$$w_{\mathrm{m}}(t)=\frac{B^2(t)}{2\mu_0}$$ 2 分⑮

磁场能量

$$W_{\mathrm{m}}(t)=w_{\mathrm{m}}(t)\cdot\pi a^2 b=\frac{Q_0^2 d}{4\varepsilon_0 b^2}\sin^2\frac{c}{a}\sqrt{\frac{2d}{\pi b}}t$$ 2 分⑯

（或磁场能量为

$$W_{\mathrm{m}}(t)=\frac{1}{2}LI^2(t)=\frac{Q_0^2 d}{4\varepsilon_0 b^2}\sin^2\frac{c}{a}\sqrt{\frac{2d}{\pi b}}t$$

）

变化的磁场在圆柱内产生感生电场

$$E\cdot 2\pi r=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2$$ 2 分⑰

感生电场的分布

$$E(r,t)=-\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=-\frac{r}{2}\frac{\mu_0\omega^2 Q_0}{2b}\cos\omega t=-\frac{Q_0 d}{2\pi\varepsilon_0 a^2 b^2}r\cos\frac{c}{a}\sqrt{\frac{2d}{\pi b}}t$$ 4 分⑱

电场能量密度

$$w_{\mathrm{e}}(r,t)=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r,t)$$ 2 分⑲

感生电场能量

$$W_{\mathrm{e}}(t)=\int_0^a w_{\mathrm{e}}(r,t)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r b=\frac{Q_0^2 d^2}{16\pi\varepsilon_0 b^3}\cos^2\frac{c}{a}\sqrt{\frac{2d}{\pi b}}t$$ 2 分⑳

（说明：因为忽略电磁辐射，所以未考虑变化的电场产生的磁场）

六、

氦气为单原子分子，有

$$C_V=\frac{3}{2}R,\quad \gamma=\frac{5}{3}$$ ①

初始时，对上部或下部气体，有理想气体状态方程

$$p_1 SL=\nu RT_1$$ 2 分②

第一阶段：上部气体加热膨胀，下部气体绝热压缩，当下部气体压强为

$$p_2=\frac{f}{A}=3.175\times10^5\,\mathrm{Pa}$$ ③

时，木塞 B 被喷出．设此时活塞距缸底 L_2，下部气体温度为 T_2，由绝热方程

$$p_1(SL)^{\gamma}=p_2(SL_2)^{\gamma} \qquad 4\text{分④}$$

得

$$L_2=(p_1/p_2)^{1/\gamma}L=0.5L=0.25\text{m} \qquad 2\text{分⑤}$$

由理想气体状态方程

$$p_2SL_2=\nu RT_2 \qquad 2\text{分⑥}$$

得

$$T_2=476.3\text{K} \qquad 2\text{分⑦}$$

木塞 B 刚被喷出时，上部气体的压强为 p_3，由活塞的力平衡

$$p_2S+k(L-L_2)=p_3S \qquad 2\text{分⑧}$$

得

$$p_3=4\times10^5\text{Pa} \qquad 4\text{分⑨}$$

第二阶段：木塞 B 撞击 K 后，上部气体加热膨胀，压强保持 p_3 不变，下部气体进入气缸 II．设最终平衡后下部气体压强为 p_4，假设活塞未碰到底部，距底部 $x>0$．

活塞的力平衡

$$p_4S+k(L-x)=p_3S \qquad 2\text{分⑩}$$

对下部气体，有理想气体状态方程

$$p_4S(x+L)=\nu RT_4 \qquad 2\text{分⑪}$$

下部气体被压缩过程中，内能变化

$$\Delta U=\nu C_V(T_4-T_2)=\frac{3}{2}[p_4(x+L)S-p_2L_2S] \qquad 2\text{分⑫}$$

外界对下部气体做的功

$$W=W_{气}+W_{弹} \qquad ⑬$$

其中上部气体做的功

$$W_{气}=p_3S(L-x) \qquad 2\text{分⑭}$$

弹簧做的功

$$W_{弹}=-\Delta E_p=\frac{1}{2}k(L-L_2)^2-\frac{1}{2}k(L-x)^2 \qquad 2\text{分⑮}$$

由热力学第一定律

$$W=W_{气}+W_{弹}=\Delta U \qquad 2\text{分⑯}$$

得

$$p_3S(L-x)+\frac{1}{2}k(L-L_2)^2-\frac{1}{2}k(L-x)^2=\frac{3}{2}\{[p_3S+k(L-x)](x+L)-p_2L_2S\} \qquad 2\text{分⑰}$$

解得

$$x=0.0141\text{m}>0 \qquad 4\text{分⑱}$$

所以活塞未碰到底部，距底部 $x=0.0141\text{m}$．

由⑩式和⑪式得下部气体最终温度

$$T_4=739\text{K} \qquad 4\text{分⑲}$$

七、

（1）两束光线之间的光程差

$$\Delta = 2t\cos\theta \qquad 4分①$$

形成 k 级亮纹时

$$\Delta = 2t\cos\theta_k = k\lambda \qquad 2分②$$

形成同一级条纹的光线的倾角 θ 相同，所以干涉图样是

等倾干涉　　2分③

焦平面上干涉亮纹的半径

$$r_k = f\tan\theta_k = f\sqrt{\left(\frac{2t}{k\lambda}\right)^2 - 1} \qquad 4分④$$

条纹为同心圆环，疏密分布为

内疏外密　　4分⑤

（2）对于中心附近的条纹，$\theta \approx 0$，$\cos\theta \approx 1$．对于 $\lambda_1 = 589\text{nm}$ 和 $\lambda_2 = 589.6\text{nm}$ 两条分立的谱线，干涉条纹最清晰时，λ_1 的亮纹与 λ_2 的亮纹重合，对比度最高，所以有

$$\Delta_1 = 2t = k_1\lambda_1 \qquad 2分⑥$$

$$\Delta_2 = 2t = k_2\lambda_2 \qquad 2分⑦$$

当 M_1 移动距离 Δt 后，若 λ_1 的亮纹与 λ_2 的暗纹重合，条纹消失，所以有

$$\Delta_1' = 2(t + \Delta t) = (k_1 + \Delta k)\lambda_1 \qquad 2分⑧$$

$$\Delta_2' = 2(t + \Delta t) = (k_2 + \Delta k - \frac{1}{2})\lambda_2 \qquad 2分⑨$$

解得

$$\Delta t = \frac{1}{4}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \approx \frac{1}{4}\frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda} = 144.7\mu\text{m} \qquad 4分⑩$$

（3）对于波长为 $\lambda = 589\text{nm} \sim \lambda + \Delta\lambda = 589.6\text{nm}$ 连续分布时，当 $\lambda + \Delta\lambda$ 的第 k 级亮纹与 λ 的第$(k+1)$级亮纹重合时，条纹不再可见，所以

$$\Delta = 2t = (k+1)\lambda = k(\lambda + \Delta\lambda) \qquad 4分⑪$$

解得能看到的最高干涉级数

$$k = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 982 \qquad 4分⑫$$

两臂的距离差

$$t = \frac{1}{2}k(\lambda + \Delta\lambda) \approx \frac{1}{2}\frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda} = 289.4\mu\text{m} \qquad 4分⑬$$

八、

（1）对电子，牛顿第二定律

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} = m\frac{v_n^2}{r_n} \qquad 2分①$$

角动量量子化条件

$$L = mr_nv_n = n\frac{h}{2\pi} \qquad 2分②$$

解得

$$r_n = n^2\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi me^2} \qquad 2分③$$

氢原子能级

$$E_n=\frac{1}{2}mv_n^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}=-\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}$$ 2 分④

（2）要使入射氢原子能量最小且碰后发出一个光子，其中一个氢原子应从 $n=1$ 基态跃迁至 $n=2$ 激发态，能级差

$$\Delta E=E_2-E_1=\frac{1}{4}E_1-E_1=-\frac{3}{4}E_1>0$$ 2 分⑤

碰后其中处于激发态的氢原子静质量变为

$$m_0'=m_0+\frac{\Delta E}{c^2}$$ 2 分⑥

要使入射氢原子能量 E 最小（阈能），碰后两个氢原子应具有相同的速度同步运动．由动量守恒

$$p_{\min}=p_1'+p_2'=p'$$ 2 分⑦

能量守恒

$$E_{\min}+m_0c^2=E_1'+E_2'=E'$$ 2 分⑧

和动量—能量关系

$$E_{\min}^2=(m_0c^2)^2+(p_{\min}c)^2$$ 2 分⑨

$$E'^2=[(m_0+m_0')c^2]^2+(p'c)^2=(2m_0c^2+\Delta E)^2+(p'c)^2$$ 2 分⑩

解得氢原子最小入射能量

$$E_{\min}=\frac{(2m_0c^2+\Delta E)^2-2(m_0c^2)^2}{2m_0c^2}=m_0c^2+2\Delta E+\frac{(\Delta E)^2}{2m_0c^2},\quad \Delta E=-\frac{3}{4}E_1$$ 4 分⑪

（3）当 $|E_1|<<m_0c^2$ 时，运动可视为非相对论的，入射氢原子的动能 E_k 和速度 v_0 满足

$$E_k=E_{\min}-m_0c^2=2\Delta E+\frac{(\Delta E)^2}{2m_0c^2}\approx 2\Delta E=\frac{1}{2}m_0v_0^2$$ 4 分⑫

碰撞满足动量守恒

$$m_0v_0=2m_0v$$ ⑬

碰后氢原子的速度

$$v=\frac{1}{2}v_0=\sqrt{\frac{\Delta E}{m}}$$ 4 分⑭

当氢原子静止时发光频率满足

$$\Delta E=h\nu_0$$ 4 分⑮

当氢原子以速度 v 运动时，由多普勒效应，发光频率为

$$\nu=(1+\frac{v}{c})\nu_0=\left(1+\sqrt{\frac{\Delta E}{m_0c^2}}\right)\frac{\Delta E}{h},\quad \Delta E=-\frac{3}{4}E_1$$ 4 分⑯

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。