一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1−5：BABCB　　6−8：DDC

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

9.ABD　　10.BCD　　11.AC　　12.ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $-\frac{1}{2}$　　14. $(x-6)^2+y^2=16$　　15. $\frac{40\sqrt{10}}{3}\pi$　　16.1

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17.（10 分）解：（1）$\because f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\cos^2\omega x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\omega x-\frac{1}{2}\cos2\omega x-\frac{1}{2}=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$

由函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.即 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，得 $\omega=1$，

$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$，　$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-1$

（2）由 $f(B)=\frac{1}{2}$ 得，$\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

$\because$ 角 B 为三角形 ABC 的内角，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

$\because a=3c$，$b=\sqrt{2}$，$\cos B=\frac{1}{2}$，由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

得 $\frac{1}{2}=\frac{(3c)^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2\times3c\times c}$，即 $c^2=\frac{2}{7}$，$\therefore c=\frac{\sqrt{14}}{7}$

18.（12 分）解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $a_2+a_3=2a_1+3d=10$，$S_{10}=10a_1+45d=110$

解得 $d=2$，$a_1=2$，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2+2(n-1)=2n$.

因为 $3T_n=2b_n+1$①

所以当 $n\geq 2$ 时 $3T_{n-1}=2b_{n-1}+1$ ②

①－②可得，$b_n=-2b_{n-1}$

当 $n=1$ 时，$b_1=1$.

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是 1 为首项，-2 为公比的等比数列。

所以 $b_n=(-2)^{n-1}$

即 $a_n=2n$，$b_n=(-2)^{n-1}$

（2）由（1）知道数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 的相同项即为数列 $\{b_n\}$ 的所有大于等于 3 的奇数项，

即是：2^2，2^4，2^6，2^8，2^{10}，2^{12}，…，即 $c_n=2^{2n}=4^n$，

所以 $T_n=\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{4^{n+1}-4}{3}$.

19.（12 分）解：（1）因为 $f(x)=e^x-x-1$，所以 $f'(x)=e^x-1$，则 $f'(1)=e-1$，$f(1)=e-2$

所以，切线方程为 $y-(e-2)=(e-1)(x-1)$

即 $y=(e-1)x-1$

（2）由（1）知，$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$.

①当 $a\leq 1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增且 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有一个零点.

②当 $a\geq \mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减且 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有一个零点.

③当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,\ln a]$ 上单调递减，在 $(\ln a,1]$ 上单调递增，而 $f(1)=\mathrm{e}-a-1$.

当 $\mathrm{e}-a-1\geq 0$，即 $1<a\leq \mathrm{e}-1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有两个零点.

当 $\mathrm{e}-a-1<0$，即 $\mathrm{e}-1<a<\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有一个零点.

综上可知，当 $a\leq 1$ 或 $a>\mathrm{e}-1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一个零点，

当 $1<a\leq \mathrm{e}-1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有两个零点.

20.（12 分）解：（1）连接 BD 交 AC 于 M，

$BC\,/\!/\,AD$，$\therefore \dfrac{BM}{MD}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{2}$，

$\because \overrightarrow{PF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$， $\therefore \frac{PF}{FD}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{BM}{MD}=\frac{PF}{FD}$， $\therefore PB // FM$ ，

又 $FM \subset$ 平面 ACF ， $PB \not\subset$ 平面 ACF ， $\therefore PB //$ 平面 ACF .

（2）设线段 PB 上存在一点 H ，使得 CH 与平面 ACF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$，

即 CH 与平面 ACF 所成角的正弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

设 $\overrightarrow{PH}=\lambda\overrightarrow{PB}(0\le\lambda\le1)$，取 AD 中点 O， 连接 OC， OP，

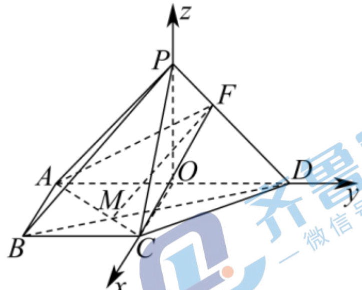
$\because PA=PD$， $\therefore PO\perp AD$，

$\because$ 侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，侧面 $PAD\cap$ 底面 $ABCD=AD$， $PO\subset$ 侧面 PAD，

$\therefore PO\perp$ 底面 $ABCD$，

$\because BC // AD$， $AB\perp AD$， $AD=2AB=2BC=2$， $\therefore CO\perp AD$，

以 O 为坐标原点，分别以 OC， OD， OP 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标



则 $C(1,0,0)$， $A(0,-1,0)$， $F\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$， $P(0,0,1)$， $B(1,-1,0)$，

则 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$， $\overrightarrow{AF}=\left(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，

设平面 ACF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=x+y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}z=0\end{cases}$， 令 $y=1$，则 $x=-1$， $z=-2$，

$\therefore$ 平面 ACF 的一个法向量为 $\vec{n}=(-1,1,-2)$，

又 $\overrightarrow{PB}=(1,-1,-1)$， $\therefore PH=\lambda(1,-1,-1)=(\lambda,-\lambda,-\lambda)$，

又 $\overrightarrow{CP}=(-1,0,1)$，$\therefore \overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PH}=(\lambda-1,-\lambda,-\lambda+1)$，

设 CH 与平面 ACF 所成角 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle \vec{n},\overrightarrow{CH}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CH}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{CH}\right|}=\dfrac{|1-\lambda-\lambda+2\lambda-2|}{\sqrt{6}\times\sqrt{(\lambda-1)^2+\lambda^2+(1-\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

整理得 $3\lambda^2-4\lambda+1=0$，解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，

当 $\lambda=1$ 时，$PH=PB=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$，

当 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 时，$PH=\dfrac{1}{3}PB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故在线段 PB 上存在一点 H，使得 CH 与平面 ACF 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，$PH=\sqrt{3}$ 或 $PH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

21.（12 分）解：（1）由 $x^2+y^2+2\sqrt{2}x-10=0$，得 $\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2=12$，

故 $C\left(-\sqrt{2},0\right)$，半径 $QC=2\sqrt{3}$

由题意知，$|QP|=|QF|$

$\therefore |QC|+|QF|=|QC|+|QP|=2\sqrt{3}>2\sqrt{2}$

$\therefore$ 对 Q 的轨迹是以 C、F 为焦点的椭圆.

设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

则 $a=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{2}$，$b=1$

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$；

（2）由（1）得，曲线为 $x^2+y^2=1(x>0)$，

由题意可知直线 MN 的斜率存在且不为 0，

由对称性可设直线 $MN: y=kx+m,(km<0)$

由直线 MN 与曲线 $x^2+y^2=1(x>0)$ 相切可得 $\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，所以 $m^2=k^2+1$，

联立$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$可得$\left(1+3k^2\right)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

所以$x_1+x_2=-\dfrac{6km}{1+3k^2}$， $x_1\cdot x_2=\dfrac{3m^2-3}{1+3k^2}$，

所以$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1\cdot x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(-\dfrac{6km}{1+3k^2}\right)^2-4\cdot\dfrac{3m^2-3}{1+3k^2}}=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{24k^2}}{1+3k^2}=\sqrt{3}$

化简得$3\left(k^2-1\right)^2=0$，所以$k=\pm1$，

所以$\begin{cases} k=1 \\ m=-\sqrt{2} \end{cases}$或$\begin{cases} k=-1 \\ m=\sqrt{2} \end{cases}$，所以直线$MN: y=x-\sqrt{2}$或$y=-x+\sqrt{2}$，

所以直线MN过点$F\left(\sqrt{2},0\right)$，

所以M，N，F三点共线.

22.（12分）解：（1）当$a=-\dfrac{1}{2}$时，函数$f\left(x\right)=x-\dfrac{\ln x}{x}\left(x>0\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$，

易知$g\left(x\right)=x^2+\ln x-1$在定义域上单调递增，且$g\left(1\right)=0$，

所以当$x\in\left(0,1\right)$时，$g\left(x\right)<0\Rightarrow f'\left(x\right)<0$，即此时$f\left(x\right)$单调递减，

当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$g\left(x\right)>0\Rightarrow f'\left(x\right)>0$，即此时$f\left(x\right)$单调递增，

故$f\left(x\right)$在$x=1$时取得极小值，$f\left(1\right)=1$；

（2）由$f\left(x\right)=x+\dfrac{2a\ln x}{x}\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{x^2-2a\ln x+2a}{x^2}$，

令$f'\left(x\right)=0$，即$x^2-2a\ln x+2a=0$，

由题意可知x_1，x_2是方程$x^2-2a\ln x+2a=0$的两个根，

则$\begin{cases} x_1^2-2a\ln x_1+2a=0 \\ x_2^2-2a\ln x_2+2a=0 \end{cases}$，

欲证$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>4\left(x_1+x_2\right)$

由于$x_1>0$，$x_2>0$，只需证$\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{x_1+x_2}>4$，

即证，$\dfrac{x_1+\dfrac{2a\ln x_1}{x_1}+x_2+\dfrac{2a\ln x_2}{x_2}}{x_1+x_2}=\dfrac{x_1+\dfrac{x_1^2+2a}{x_1}+x_2+\dfrac{x_2^2+2a}{x_2}}{x_1+x_2}=2+\dfrac{2a}{x_1x_2}>4$

即证 $a>x_1x_2$，

令 $h(x)=x^2-2a\ln x+2a(x>0)\Rightarrow h'(x)=\dfrac{2x^2-2a}{x}$，

若 $a\le 0$，$h'(x)>0\Rightarrow h(x)$ 定义域上单调递增，不存在两个零点，舍去；

则 $a>0$，可知在 $x\in(0,\sqrt{a})$ 时，$h'(x)<0\Rightarrow h(x)$ 单调递减，

在 $x\in(\sqrt{a},+\infty)$ 时，$h'(x)>0\Rightarrow h(x)$ 单调递增，

要符合题意则需 $h(\sqrt{a})=3a-a\ln a<0\Rightarrow a\in(\mathrm{e}^3,+\infty)$，

又 $x\to 0$ 时，$h(x)>0$，$x\to+\infty$ 时，$h(x)>0$

此时不妨令 $0<x_1<\sqrt{a}<x_2$，

构造函数 $H(x)=h(x)-h\left(\dfrac{a}{x}\right)(0<x<\sqrt{a})$

$$\Rightarrow H'(x)=\frac{2x^2-2a}{x}+\frac{2\left(\dfrac{a}{x}\right)^2-2a}{\dfrac{a}{x}}\cdot\frac{a}{x^2}=\frac{2(x^2-a)^2}{x^3}\ge 0,$$

即 $H(x)$ 在定义域内单调递增，即 $H(x)<H(\sqrt{a})=0\Rightarrow h(x)<h\left(\dfrac{a}{x}\right)$，

所以 $h(x_1)=h(x_2)<h\left(\dfrac{a}{x_1}\right)$，

因为 $0<x_1<\sqrt{a}<x_2$，所以 $\dfrac{a}{x_1}>\sqrt{a}$，

且在 $x\in(\sqrt{a},+\infty)$ 时，$h(x)$ 单调递增，故 $x_2<\dfrac{a}{x_1}\Rightarrow x_1x_2<a$，得证.