

驻马店市 2023-2024 学年度高三年级期末统一考试

数学

注意事项:

- 1.答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
- 4.本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.设复数 $z = \frac{1+i}{4-3i}$, 则 $\bar{z} =$

- A. $-\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i$ B. $\frac{1}{25} - \frac{7}{25}i$ C. $-\frac{1}{7} + i$ D. $\frac{1}{7} - i$

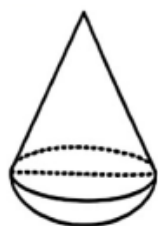
2.设集合 $A = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x^2 + 3x - 4 = 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-1, 1, 3\}$ B. $\{-3, -1, 1\}$
C. $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

3.已知函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + 2x + c}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 $a^2 + 4c^2$ 的最小值为

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 5

4.如图,这是某厂生产的一批不倒盼型台灯外形,它由一个圆锥和一个半球组合而成,且圆锥的体积恰好等于半球的体积,则该圆锥的轴截面的顶角的余弦值为



- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

5.设圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 和圆 $C_2: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$ 交于 A, B 两点, 则四边形 C_1AC_2B 的面积为

- A. $2\sqrt{2}$ B. 4 C. 6 D. $4\sqrt{2}$

6.已知 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$

- A. $-\frac{2}{15}$ B. $\frac{2}{15}$ C. $-\frac{7}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

7. 将 5 本不同的书（2 本文学书、2 本科学书和 1 本体育书）分给甲、乙、丙三人，每人至少分得 1 本书，每本书只能分给一人，其中体育书只能分给甲、乙中的一人，则不同的分配方法数为

- A. 78 B. 92 C. 100 D. 122

8. 已知 O 为坐标原点，抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点，若 $|AF| = 3|BF|$ ，则 $|OA| =$

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{15}$ C. $\sqrt{17}$ D. $\sqrt{21}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 为了解高三学生体能情况，某中学对所有高三男生进行了 1000 米跑测试，测试结果表明所有男生的成绩 X （单位：分）近似服从正态分布 $N(75, \sigma^2)$ ， $P(X < 60) = 0.1$ ， $P(X < 70) = 0.3$ ，则下列说法正确的是

- A. 若从高三男生中随机挑选 1 人，则他的成绩在 $(80, 90]$ 内的概率为 0.2
 B. 若从高三男生中随机挑选 1 人，则他的成绩在 $[70, 80]$ 内的概率为 0.4
 C. 若从高三男生中随机挑选 2 人，则他们的成绩都不低于 75 的概率为 0.25
 D. σ 越大， $P(X \leq 75)$ 的值越小

10. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位长度，再将所得的图象关于 x 轴对称，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列结论正确的是

- A. $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称 B. $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域为 $[\frac{1}{2}, 1]$
 C. $g(x + \frac{\pi}{3})$ 为偶函数 D. $g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x \in (0, 6), \\ e^{x-6} - 1, & x \in [6, +\infty), \end{cases}$ 存在 $n(n \geq 3)$ 个不同的正数 x_i ， $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，使得

$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \dots = \frac{f(x_n)}{x_n}$ ，则下列说法正确的是

- A. n 的最大值为 5 B. n 的最大值为 4
 C. $\frac{f(x_1)}{x_1}$ 的最大值为 e D. $\frac{f(x_1)}{x_1}$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$

12. 在三棱锥 $A-BCD$ 中， $AD = BC = 4$ ， $AB = BD = DC = CA = 6$ ， M 为 BC 的中点， N 为 BD 上一点，

球 O 为三棱锥 $A-BCD$ 的外接球, 则下列说法正确的是

A. 球 O 的表面积为 11π

B. 点 A 到平面 BCD 的距离为 $\sqrt{14}$

C. 若 $MN \perp AB$, 则 $DN = 6NB$

D. 过点 M 作球 O 的截面, 则所得的截面中面积最小的圆的半径为 2

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 26, 且数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 3 项和为 $\frac{13}{18}$, 则 $a_2 =$ _____.

14. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + m, & x > 0, \\ x^2 + 4x, & x \leq 0 \end{cases}$ 有最小值, 则 m 的取值范围是 _____.

15. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形, D 为 CB 上一点, O 为 $\triangle ABC$ 的中心, E 为 $\triangle ABC$ 内一点 (包括边界), 且 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OE}$ 的最大值为 _____.

16. 探究函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象和性质时发现它的图象实际上是双曲线, 将函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象绕原点顺时针旋转得到焦点在 x 轴上的双曲线 C , $P(x_0, y_0)$ 是双曲线 C 上一点, 则 $(\sqrt{2}-1)x_0^2 - (\sqrt{2}+1)y_0^2 =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a\cos B + b\cos A = 2c\cos C$, $ab = 4$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 求 AB 边上的高的最大值.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$ 且满足 $a_{n+1} - a_n = 1 + (-1)^n$.

(1) 令 $b_n = a_{2n-1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

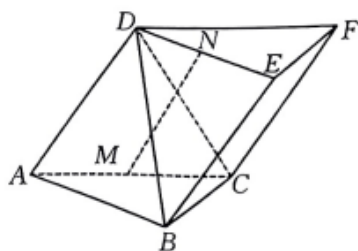
(2) 求 S_{30} .

19. (12 分)

如图, 在斜三棱柱 $ABC-DEF$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 $ACFD$, $AB \perp BC$, 四边形 $ACFD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle DAC = \frac{\pi}{3}$, $BC = 1$, M, N 分别为 AC, DE 的中点.

(1) 证明: $BC \perp MN$.

(2) 求直线 MN 与平面 BCD 所成角的正弦值.



20. (12 分)

一枚质地均匀的小正四面体，其中两个面标有数字 1，两个面标有数字 2. 现将此正四面体任意抛掷 n 次，落于水平的桌面，记 n 次底面的数字之和为 X_n .

(1) 当 $n=2$ 时，记 Y 为 X_2 被 3 整除的余数，求 Y 的分布列与期望；

(2) 求 X_n 能被 3 整除的概率 P_n .

21. (12 分)

动点 $M(x, y)$ 到定点 $F_1(-1, 0)$ 的距离和它到直线 $x = -4$ 的距离的比是常数 $\frac{1}{2}$ ，点 M 的轨迹为 C .

(1) 求 C 的方程，并说明 C 是什么曲线；

(2) 过点 F_1 作不与坐标轴垂直的直线 l 交 C 于 A, B 两点，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 Q ，若

$14|F_1A||F_1B||F_1Q| = 9(|F_1A| + |F_1B|)$ ，求 l 的方程.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = ax - \ln x$ 有两个零点.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点， $x_2 > x_1$ ，证明： $x_1^2 x_2 > e^{\frac{8}{3}}$.