昆明市2024届高三“三诊一模”摸底诊断测试

数学参考答案及评分标准

一、单选题；二、多选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	D	C	A	B	B	D	AB	AC	BCD	BCD

三. 填空题

13. 1（0，±1，±2 均可） 14. 18 15. $\frac{5}{3}$ 16. $\frac{64}{3}$

17．解：（1）因为 $\cos\angle BAC=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin\angle BAC=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

因为 $\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos\angle ACB=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

在△ABC中，由正弦定理可得 $\frac{BC}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}$，解得 $BC=3$.

又因为 $\sin\angle ABC=\sin(\angle BAC+\angle ACB)=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$. ………………………5 分

（2）由（1）可知，$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，因为 $CD\,//\,AB$，所以 $\angle BCD=\frac{\pi}{4}$，

又因为 $CB\perp BD$，即 $\angle CBD=\frac{\pi}{2}$，故 $\angle CDB=\frac{\pi}{4}$，

所以 $\angle ABD=\angle ABC+\angle CBD=\frac{3\pi}{4}$，$BD=BC=3$，

在△ABD中，由余弦定理可得 $AD^2=(\sqrt{2})^2+3^2-2\times\sqrt{2}\times3\cos\frac{3\pi}{4}$，

解得 $AD=\sqrt{17}$. ………………………10 分

18．解：（1）当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{4}$，所以 $a_1=\frac{1}{2}$，

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{4}-(\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{1}{4})$，

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=-1$，

所以数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，-1为公比的等比数列，

即$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2}$.　　　　　　　　　　　　　　　……………………6 分

（2）由题意，$d_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\frac{\frac{(-1)^n}{2}-\frac{(-1)^{n-1}}{2}}{n+1}=\frac{(-1)^n}{n+1}$，则$\frac{1}{d_n}=\frac{n+1}{(-1)^n}$，

记数列$\{\frac{1}{d_n}\}$的前n项和为T_n，

所以$T_{2024}=-2+3-4+5+\cdots-2024+2025=1\times\frac{2024}{2}=1012$.　　…………………12 分

19．解：（1）证明：因为$PA=AC$，E是PC的中点，所以$AE\perp PC$，

在$\mathrm{Rt}\triangle PAB$中，$PA=1$，$PB=\sqrt{6}$，所以$AB=\sqrt{5}$，

在$\triangle ABC$中，$AC=1$，$BC=2$，所以$AC^2+BC^2=AB^2$，得$AC\perp BC$，

又$PA\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，所以$PA\perp BC$，

又$AC\perp BC$，$PA\cap AC=A$，所以$BC\perp$平面PAC，

由$AE\subset$平面PAC得$AE\perp BC$，

又$PC\cap BC=C$，所以$AE\perp$平面PBC，

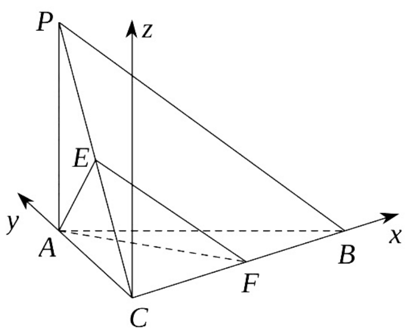
由$AE\subset$平面AEF得，平面$AEF\perp$平面PBC．……………………………6 分

（2）存在点F满足条件，

以C为原点，建立空间直角坐标系$C-xyz$如图，

设$CF=t(0\le t\le 2)$，则$A(0,1,0)$，$E(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$F(t,0,0)$，

$AE=(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$AF=(t,-1,0)$，



设平面AEF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0,\\ tx-y=0,\end{cases}$令$x=1$得$y=z=t$，

所以平面AEF的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(1,t,t)$，

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

由已知得 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{2}$，即 $\frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}=\frac{1}{2}$，解得 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $CF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以存在点 F 使平面 AEF 与平面 ABC 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，此时 $CF=\frac{\sqrt{2}}{2}$． …………12 分

20．解：（1）记“输入的问题没有语法错误”为事件 A，“一次应答被采纳”为事件 B，

由题意 $P(\overline{A})=0.1$，$P(B|A)=0.8$，$P(B|\overline{A})=0.3$，则

$P(A)=1-P(\overline{A})=0.9$，

$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.9\times0.8+0.1\times0.3=0.75$． ……6 分

（2）依题意，$X\sim B(8,\frac{3}{4})$，$P(X=k)=C_8^k(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{8-k}$，

当 $P(X=k)$ 最大时，有 $\begin{cases}P(X=k)\geq P(X=k+1),\\P(X=k)\geq P(X=k-1),\end{cases}$

即 $\begin{cases}C_8^k(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{8-k}\geq C_8^{k+1}(\frac{3}{4})^{k+1}(\frac{1}{4})^{7-k},\\C_8^k(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{8-k}\geq C_8^{k-1}(\frac{3}{4})^{k-1}(\frac{1}{4})^{9-k},\end{cases}$ 解得：$\frac{23}{4}\leq k\leq\frac{27}{4}$，$k\in\mathbf{N}$，

故当 $P(X=k)$ 最大时，$k=6$． ……………………………12 分

21．解：（1）因为 $\angle AOF$ 与 $\angle BOF$ 互补，所以 OA 与 OB 关于 y 轴对称，

所以 $AB\perp y$ 轴，又因为直线 l 过 $(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$，故 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

设 A 在第一象限，因为 $|AB|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则 $A(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，

设 F' 为 C 的左焦点，则 $|BF'|=|AF|$，故 $|AF|+|BF|=|AF|+|AF'|=2a$，即 $a=\sqrt{2}$，

因为 A 在 C 上，$\frac{(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}{2}+\frac{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}{b^2}=1$，解得 $b=1$，

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.　　　　　　　　..................................6 分

（2）设 $A(x_1,y_1)$ ，$B(x_2,y_2)$ ，直线 $l:y=kx+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

联立 $\begin{cases} y=kx+\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $3(2k^2+1)x^2+4\sqrt{3}kx-4=0$ ，

$x_1+x_2=-\frac{4\sqrt{3}k}{3(2k^2+1)}$ ，$x_1x_2=\frac{-4}{3(2k^2+1)}$ ，

所以 $y_1y_2=(kx_1+\frac{\sqrt{3}}{3})(kx_2+\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{-6k^2+1}{3(2k^2+1)}$ ，　　..............................9 分

故 $\frac{S_{\triangle AOB}}{\tan\angle AOB}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB}{\frac{\sin\angle AOB}{\cos\angle AOB}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{2}=-\frac{1}{2}$ ，

所以 $\frac{S_{\triangle AOB}}{\tan\angle AOB}$ 为定值 $-\frac{1}{2}$.　　　　　　　..............................12 分

22．解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $x\in(0,+\infty)$ ，

$f'(x)=(2x-2a)\ln x+(x^2-2ax)\cdot\frac{1}{x}-x+2a=2(x-a)\ln x$.

① 当 $a\le 0$ 时，令 $f'(x)=0$ ，得 $x=1$ ，则当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$ ；当 $x>1$ 时，

$f'(x)>0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

② 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ ，得 $x=1$ 或 $x=a$.

i）当 $0<a<1$ 时，则当 $0<x<a$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$ ；当 $a<x<1$ 时，$f'(x)<0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,1)$ 上单调递减.

ii）当 $a=1$ 时，当 $x>0$ 时，$f'(x)\ge 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

iii）当 $a>1$ 时，则当 $0<x<1$ 或 $x>a$ 时，$f'(x)>0$ ；当 $1<x<a$ 时，$f'(x)<0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,a)$ 上单调递减.　　　.........................6 分

（2）当 $x>0$ 时，令 $x=\frac{1}{e^t}$ ，则 $x\ln x=\frac{\ln\frac{1}{e^t}}{e^t}=\frac{-t}{e^t}$ ，$x\to 0$ 时，$t\to+\infty$ ，则 $\frac{t}{e^t}\to 0$ ，故

$x\ln x\to 0$，则 $x^2\ln x\to 0$，故当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x^2\ln x-2ax\ln x-\frac{1}{2}x^2+2ax\to 0$.

所以当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{2}a^2(1-\ln a)\le 0$，解得 $a\ge e$，

由（1）可知，当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极小值为 $f(a)=\frac{1}{2}a^2(3-2\ln a)$，

由题，则有 $\frac{1}{2}a^2(3-2\ln a)\ge\frac{1}{2}a^2(1-\ln a)$，解得 $1<a\le e^2$.

当 $f(a)=\frac{1}{2}a^2(3-2\ln a)=0$，解得 $a=e^{\frac{3}{2}}$，

①当 $e\le a<e^{\frac{3}{2}}$ 时，$f(a)=\frac{1}{2}a^2(3-2\ln a)>0$，$f(x)>0\ge\frac{1}{2}a^2(1-\ln a)$，符合题意；

②当 $e^{\frac{3}{2}}\le a\le e^2$ 时，$f(a)=\frac{1}{2}a^2(3-2\ln a)\le 0$，$f(x)_{\min}=f(a)\ge\frac{1}{2}a^2(1-\ln a)$，符合题意.

综上，当 $a\in[e,e^2]$ 时，$f(x)\ge\frac{1}{2}a^2(1-\ln a)$ 恒成立. ....12 分