2023—2024学年度第一学期期末学业水平检测

高三数学试题　　2024.01

本试卷共4页，22题．全卷满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上，并将条形码粘贴在答题卡指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，请将答题卡上交。

一、单项选择题：本大题共8小题．每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=(-1,3)$，$B=\{x\,|\,x+a\geq 0\}$，若 $A\cup B=\{x\,|\,x>-1\}$，则实数 a 的取值范围是

A．$[-3,1]$　　B．$(-3,1]$　　C．$[-3,1)$　　D．$(-3,1)$

2．复数 $z=a+\mathrm{i}$（$a\in\mathbf{R}$，i为虚数单位），$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，若 $(z+1)(\bar{z}+1)=1$，则 $a=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

3．在四边形 $ABCD$ 中，四个顶点 A，B，C，D 的坐标分别是 $(-2,0)$，$(-1,3)$，$(3,4)$，$(2,3)$，E，F 分别为 AB，CD 的中点，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB}=$

A．10　　B．12　　C．14　　D．16

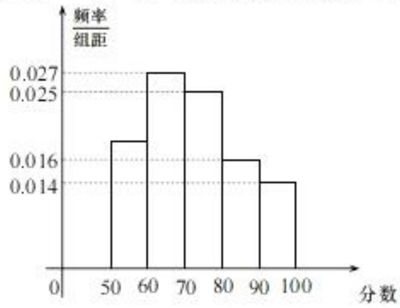
4．2023年是共建“一带一路”倡议提出十周年．而今“一带一路”已成为当今世界最受欢迎的国际公共产品和最大规模的国际合作平台．树人中学历史学科组近期开展了“回望丝路”系列主题活动，组织“一带一路”知识竞赛，并对学生成绩进行了汇总整理，形成以下直方图．该校学生“一带一路”知识竞赛成绩的第60百分位数大约为

A．72

B．76

C．78

D．85



5．已知等差数列 $\{a_n\}$ 各项均为正整数，$a_{11}=a_1+a_2+a_3$，$a_2<10$，则其公差 d 为

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

6．已知点F是抛物线$E:y^2=2px(p>0)$的焦点，过点$(2\sqrt{2},0)$的直线l与曲线E交于点A,B，若$2|AF|+|BF|$的最小值为14，则E的准线方程为

A．$y=-4$　　B．$y=-2$　　C．$x=-4$　　D．$x=-2$

7．已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，E、F是线段AC_1上的点，且$AE=EF=FC_1$，分别过点E，F作与直线AC_1垂直的平面α、β，则正方体夹在平面α与β之间的部分的体积占整个正方体体积的

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

8．已知O为坐标原点，双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点依次为$F_1,F_2$，过点$F_1$的直线与$E$在第一象限交于点$P$，若$|PF_1|=2|PF_2|$，$|OP|=\sqrt{7}a$，则$E$的渐近线方程为

A．$y=\pm\sqrt{2}x$　　B．$y=\pm\sqrt{3}x$　　C．$y=\pm x$　　D．$y=\pm 2x$

二、多项选择题：本大题共4小题．每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分．

9．一个密闭的容器中装有2个红球和4个白球， 所有小球除颜色外均相同．现从容器中不放回地抽取两个小球．记事件A:“至少有1个红球”，事件B:“至少有1个白球”，事件$C=A\cap B$，则

A．事件A,B不互斥　　B．事件A,B相互独立

C．$P(A|B)=P(B|A)$　　D．$P(C|A)+P(C|B)>2P(C)$

10．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的图象关于点$(\frac{4\pi}{9},0)$对称，在$(\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{9})$上单调递减，$f(\frac{2\pi}{3})=f(\frac{8\pi}{9})$．将$y=f(x)$的图象向右平移$\frac{2\pi}{9}$个单位得到函数$g(x)$的图象，则

A．$\omega=\frac{3}{2}$　　B．$\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$

C．$f(2023\pi)+f(2024\pi)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　D．$g(x)$为偶函数

11．若实数$a,b>0$，且$ab=a+b+8$，则

A．$a+b\le 8$　　B．$ab\ge 16$　　C．$a+3b\ge 4+6\sqrt{3}$　　D．$\frac{1}{a-1}+\frac{4}{b-1}\ge\frac{4}{3}$

12．将函数$y=f(x)$的图象绕原点逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$后得到的曲线依然可以看作一个函数的图象．以下函数中符合上述条件的有

A．$y=\sin x$　　B．$y=\sin 2x$　　C．$y=x-\ln x$　　D．$y=xe^x$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(1+\frac{2x}{y})(x-y)^6$ 的展开式中含 x^4y^2 项的系数是__________.（结果用数字表示）

14. 正八面体各个面分别标以数字1到8．抛掷一次该正八面体，观察它与地面接触的面上的数字，得到样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ．已知事件 $A=\{1,2,3,4\}$ ，$B=\{1,2,3,6\}$ ，$C=\{1,a,b,c\}$ ，若 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 但 A,B 与 C 均不独立，则事件 $C=$ __________.

15. 已知动点 P,Q 分别在圆 $M:(x-\ln m)^2+(y-m)^2=\frac{1}{4}$ 和曲线 $y=\ln x$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为__________.

16. 若函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+a|x^2-1|$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是__________.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c .

(1) 证明：若 $C=2A$ ，则 $a=b-2a\cos C$ ；

(2) 探究：是否存在一个 $\triangle ABC$ ，其三边为三个连续的自然数，且最大角是最小角的两倍？如果存在，试求出最大边的长度；如果不存在，说明理由.

18.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{a\mathrm{e}^x}{x}-x+\ln x(a\in\mathrm{R})$.

(1) 当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

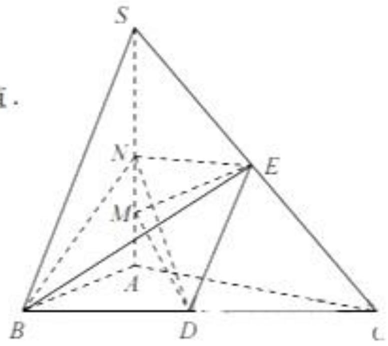
(2) 当 $a=1$ 时，证明：$f(x)\ge \mathrm{e}-1$.

19.（本题满分 12 分）

如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA\perp$ 底面 ABC ，$AB\perp AC$ ，$SA=4$ ，$AB=2$ ，$AC=2\sqrt{3}$ ，点 D,E 分别为棱 BC,SC 的中点，点 M,N 在棱 SA 上，$AM=1$ ，且满足 $DM\ //$ 平面 BEN .

(1) 求 AN 的长；

(2) 求平面 BEN 与平面 DEM 夹角的余弦值.



20．（本题满分 12 分）

为培养德智体美劳全面发展的社会主义接班人，某学校每月都会开展学农实践活动．已知学农基地前10个月的利润数据如下表，月份用x表示，$t=\sin x$，利润用y（单位：万元）表示，已知y与x的经验回归方程为$\hat{y}=b\sin x+a$．

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4.683	4.819	3.282	1.486	1.082	2.441	4.314	4.979	3.824	1.912
t	0.841	0.909	0.141	−0.757	−0.959	−0.279	0.657	0.989	0.412	−0.544

（1）求a，b的值**（结果精确到 1）**；

（2）某班班主任和农学指导教师分别独立从该班5名班级干部名单中各随机选择2人作为组长．设被选出的组长构成集合M，集合M中元素的个数记为随机变量X．

（ⅰ）求X的分布列及数学期望；

（ⅱ）规定：进行多轮选择，每轮出现$X=3$记为A，出现$X\neq3$记为B，先出现AB为甲胜，先出现AA为乙胜．记P_1表示“第一轮为A且最终甲胜的概率”，P_2表示“第一轮为B且最终甲胜的概率”，求P_1，P_2及甲胜的概率．

参考数据： $\sum\limits_{i=1}^{10}t_iy_i\approx14.23$，$\bar{t}\approx0.14$，$\bar{y}\approx3.28$，$\sum\limits_{i=1}^{10}(t_i-\bar{t})^2\approx4.80$．

参考公式： 对于一组数据(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，其回归直线$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$的斜率和截距的最小二乘估计公式为：

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}，\quad \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

21．（本题满分 12 分）

已知O为坐标原点，点P在椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，$C_1$的左、右焦点$F_1$，$F_2$恰为双曲线$C_2:x^2-\dfrac{4y^2}{3}=1$的左、右顶点，$C_1$的离心率$e=\dfrac{1}{2}$．

（1）求C_1的标准方程；

（2）若直线l与C_1相交于A，B两点，AB中点W在曲线$C_3:(x^2+\dfrac{4y^2}{3})^2=x^2-\dfrac{4y^2}{3}$上．探究直线$AB$与双曲线$C_2$的位置关系．

22．（本题满分 12 分）

在各项均为正数的数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_2=16$，$a_{n+1}a_{n-1}=4{a_n}^2(n>1)$．

（1）证明数列$\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\}$为等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=2+(2\sqrt{\log_2a_n}+1)\cdot\ln\dfrac{n}{n+1}$，记数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$．

（ⅰ）求S_n；（ⅱ）证明：$S_n>-\dfrac{1}{2}$．

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq。**