

名校教育联盟·2024 届高三入学摸底考试

数 学

本试卷共 4 页。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷和答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应的答案标号涂黑,如有改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案;回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 z 满足 $\frac{1}{1-z} = -i$, 则 $|z| =$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 1

D. $\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A = \{x \mid \log_{\frac{1}{7}} x \geq 1\}$, $B = \{y \mid y = (\frac{1}{2})^x, x \geq 2\}$, 则 $A \cap B =$

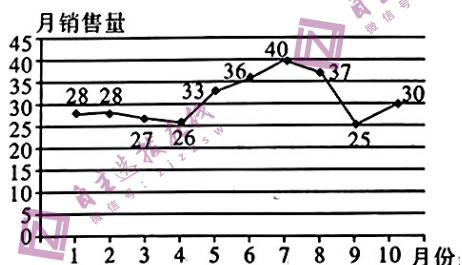
A. $(0, \frac{1}{4}]$

B. $(0, \frac{1}{2}]$

C. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

3. 下图为某商家 2023 年 1 月至 10 月某商品的月销售量, 则下列说法正确的是



A. 这 10 个月的月销售量的中位数为 28

B. 这 10 个月的月销售量的平均数为 31

C. 这 10 个月的月销售量的第 75 百分位数为 34.5

D. 前 5 个月的月销售量的方差大于后 5 个月的月销售量的方差

4. 设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1, E 为 CD 的中点, F, G 分别是棱 AC, BC 上的点, 且满足 $AF = 2CG = \lambda, GF \parallel$ 平面 ABE , 则 λ 的值是

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

5. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ (其公比 $q \in (0, 1)$) 的前 n 项积为 T_n . 设甲: $a_1 a_{11} = a_7$, 乙: T_n 有最大值 T_5 , 则甲是乙的

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

6. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$

- A. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$
B. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$
C. $\frac{7}{9}$
D. $-\frac{7}{9}$

7. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 D 为 C 的准线上一点, 且 $|AF| = |AD| = 3$, 则 $\triangle ABD$ 的面积为

- A. $\frac{15}{4}$
B. $\frac{15}{2}$
C. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
D. $9\sqrt{2}$

8. 已知函数 $f(x) = x \ln x - x$, 若 $\forall x_1 > 0, x_2 > 0$, 且 $x_1 \neq x_2$, 恒有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{e^{tx_1} - e^{tx_2}} < 1$, 则正实数 t 的取值范围为

- A. $[e, +\infty)$
B. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$
C. $(0, e]$
D. $(0, \frac{1}{e}]$

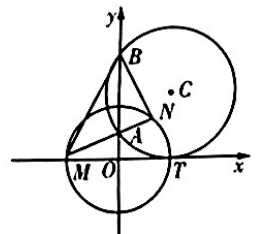
二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 部分选对得 3 分, 有选错得 0 分.

9. 一个正方体的顶点都在球面上, 过球心作一截面, 如图所示, 则截面的可能图形是



10. 如图, 圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1, 0)$, 与 y 轴正半轴交于 A, B 两点, 且 $|AB| = \frac{3}{2}$, 过点 A 任作一条直线与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 M, N 两点, 则

- A. 圆 C 的方程为 $(x-1)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$
B. 圆 C 与圆 O 的相交弦所在直线方程为 $4x + 5y + 4 = 0$
C. $\frac{|MA|}{|MB|} + \frac{|NB|}{|NA|} = \frac{5}{2}$
D. $\frac{|MA|}{|MB|} - \frac{|NB|}{|NA|} = \frac{3}{2}$



17.(15分)某电视台综艺节目邀请甲、乙两位好友参加了“心有灵犀、竞猜谜语”活动:即从5个谜语中随机抽取3个,让甲负责比划,乙负责猜谜语.已知甲会比划其中3个谜语,这3个谜语乙猜对的概率都为 $\frac{2}{3}$,另外2个不会比划的谜语乙无法猜对.

(1)求甲、乙配合猜对1个谜语的的概率;

(2)设甲、乙配合猜对谜语个数为 X ,求 X 的分布列和数学期望.

18.(17分)设动点 $M(x,y)$ 与定点 $F_2(\sqrt{2},0)$ 的距离和它到定直线 $l:x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的距离之比等于 $\sqrt{2}$,记点 M 的轨迹为曲线 C .

(1)求曲线 C 的方程;

(2)设 $F_1(-\sqrt{2},0)$,过点 F_2 的直线与 C 的右支相交于 A,B 两点, I 是 $\triangle F_1AB$ 内一点,且满足 $|F_1B| \cdot \vec{IA} + |BA| \cdot \vec{IF_1} + |AF_1| \cdot \vec{IB} = \mathbf{0}$,试判断点 I 是否在直线 l 上,并说明理由.

19.(17分)已知函数 $f(x) = x^2 - 1 - ax \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1)若 $f(x)$ 是单调递增函数,求 a 的取值范围;

(2)若 $f(x)$ 存在三个零点 x_1, x_2, x_3 ,且 $x_1 + x_2 + x_3 < \frac{7}{2}$,求 a 的取值范围.