2024年普通高等学校招生全国统一考试仿真模拟卷(T8联盟)

数学试题(二)
参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	B	A	A	C	A
题号	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	BCD	ACD	ACD	ACD

1.【答案】B

【解析】由题 $A=(0,4)$，$B=(-\infty,1]\cup(3,+\infty)$，$\therefore \complement_{\mathbf{R}}B=(1,3]$，$A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=(1,3]$.

2.【答案】B

【解析】由题 $z=\dfrac{7+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}=\dfrac{(7+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}=2+\mathrm{i}$，

$\therefore \overline{z}$ 的虚部是 -1.

3.【答案】A

【解析】$\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\theta\right)=\cos\left[2\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)\right]=1-2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=1-2\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

4.【答案】A

【解析】$\because a_1>0$，$\{a_n\}$ 是单调递增的，$\therefore q>1$，

$\therefore$ 甲是乙的充分不必要条件.

5.【答案】C

【解析】设直线 $l: y=kx+2$，将直线 l 代入双曲线可得 $x^2-\dfrac{(kx+2)^2}{2}=1$，

化简可得 $(2-k^2)x^2-4kx-6=0$，

当 $2-k^2=0$ 时，方程有解，不符合题意；

当 $2-k^2\neq 0$ 时，$\Delta=(-4k)^2-4(2-k^2)\times(-6)<0$，解得 $k>\sqrt{6}$ 或 $k<-\sqrt{6}$，只有 C 满足.

6.【答案】A

【解析】由 $\sin B=\cos A>0$，知 A 为锐角，于是 $\sin B=\cos A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)$，故 $B=\dfrac{\pi}{2}-A$ 或者 $B+\dfrac{\pi}{2}-A=\pi$，即 $B+A=\dfrac{\pi}{2}$ 或者 $B=\dfrac{\pi}{2}+A$，

$\therefore$ 不一定为直角三角形，故 A 错误；

由 $\cos 2A<\cos 2B\Leftrightarrow \sin^2 A>\sin^2 B\Leftrightarrow \sin A>\sin B\Leftrightarrow a>b$，故 B 正确；

由 $2b=a+c$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2ac}\geqslant\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore 0<B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，故 C 正确；

满足条件 $a=\sqrt{3}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$B=\dfrac{\pi}{3}$ 的三角形只有一个，故面积唯一确定，故 D 正确.

7.【答案】D

【解析】由题意可得，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，且 $|\cos 2|<\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，又 $f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)=f(\ln 2)$，且 $\ln 4=2\ln 2>1$，则 $\ln 2>\dfrac{1}{2}$，$\therefore |\cos 2|<\dfrac{1}{2}<\ln 2$，故 $a<c<b$.

8.【答案】C

【解析】由题意 $f(x+2)=-f(x)=f(-x)$，可知 $f(\log_2 3)=f(2-\log_2 3)=f\left(\log_2\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{16}{9}-1=\dfrac{7}{9}$，故 A 正确；

由 $f(x+2)=f(-x)$ 可知，$x=1$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称轴，故 B 正确；

由对称性可知 $y=f(x)$ 与 $y=-2$，在区间 $[-2,12]$ 上共有 8 个交点，8 个交点的横坐标之和是 40，故 C 错误；

又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，且 $f(1)=3$，$f(2)=0$，$f(3)=-3$，$f(4)=0$，可得 $\sum\limits_{k=1}^{2\,023}f(k)=0$，故 D 正确.

9.【答案】BCD

【解析】将这一组数据从小到大排列，$10\times 70\%=7$，故第 70 百分位数为 $\dfrac{7+8}{2}=7.5$，故 A 正确；

经验回归方程的决定系数 R^2 越大，表示残差平方和越小，即模型的拟合效果越好，故 B 错误；

样本相关系数等于 0 时，表明成对样本数据没有线性相关关系，但不排除它们之间有其他相关关

系，故 C 错误；

$P(\xi\geqslant 4)=0.23$，$P(\xi\leqslant 0)=0.23$，则 $P(\xi\geqslant 0)=0.77$，故 D 错误.

10.【答案】ACD

【解析】点$(2,0)$到含参直线 l：$x\cos\theta+y\sin\theta-2\cos\theta-1=0$，$(\theta\in[0,2\pi))$的距离恒为一个定值 1，故 A 正确；

由 A 可得，直线 l 可以看作是圆 C：$(x-2)^2+y^2=1$ 的切线，故对于任意 $\theta\in[0,2\pi)$，平面上直线 l 均不经过的点组成的面积就是圆 C 的面积，即为 π，故 D 正确；

点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$在圆 C：$(x-2)^2+y^2=1$ 的内部，由 D 可知，不存在 $\theta\in[0,2\pi)$，使得点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$在某条直线 l 上，故 B 错误；

直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 是圆 C：$(x-2)^2+y^2=1$ 的一条切线，由 D 可知，存在 $\theta\in[0,2\pi)$，使得某条直线 l 与直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 平行，此时，两个切点的连线为圆 C 的直径，故 C 正确.

11.【答案】ACD

【解析】$\because P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$，$\therefore P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，故 A 正确；

$P(A)-P(B)=P(A\overline{B})-P(\overline{A}B)$，而 $P(B)=\frac{1}{3}\neq P(\overline{B})$，故 B 错误；

$P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，化简得 $P(AB)=P(A)P(B)$，故 C 正确；

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.4=P(A)$，故 D 正确.

12.【答案】ACD

【解析】由已知条件中的旋转，可将正方形 ABC_1D_1 放于两个全等正方体的公共面上，正方形 $ABCD$ 和正方形 $A_2BC_1D_2$ 的位置如图 1 所示，连接 AN，MD_1，PC_1，PA，PN，A_2C_1，如图 2 所示，

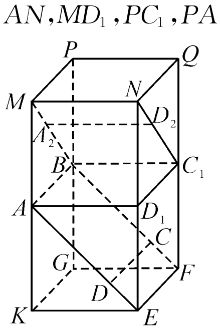


图 1

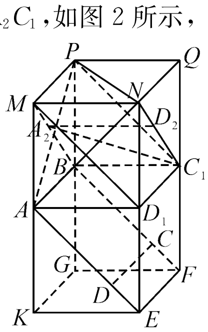


图 2

由上图易知$\triangle PNC_1$ 是等边三角形，且 $BC/\!/PC_1$，故 A 正确；

$\because$平面 $ABCD/\!/$平面 MD_1C_1P，直线 A_2C_1 与平面 MD_1C_1P 相交，则直线 A_2C_1 与平面 $ABCD$ 相交，故 B 错误；

过点 D_2 作 $D_2H/\!/C_1D_1$，则有 $D_2H/\!/AB$，$D_2H\not\subset$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，$D_2H/\!/ABCD$，

点 D_2 到平面 $ABCD$ 的距离等价于点 H 到平面 $ABCD$的距离，如图 3 所示，

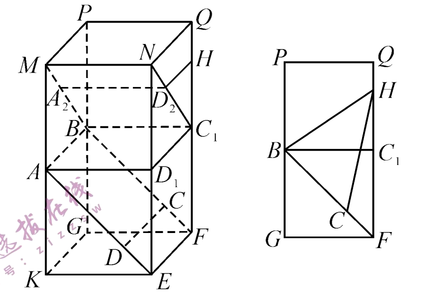


图 3

$CB=C_1D_2=1$，$\angle BFC_1=\angle D_2C_1H=45^\circ$，

则 $C_1H=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$CF=\sqrt{2}-1$，

点 C 到 HF 的距离为 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$S_{\triangle HBC}=S_{\triangle HBF}-S_{\triangle HCF}=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 1-\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$，

设点 H 到平面 $ABCD$ 的距离为 h，根据等体积关系 $V_{H\text{-}ABC}=V_{A\text{-}HBC}$，

有$\frac{1}{3}hS_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot AB\cdot S_{\triangle HBC}$，解得 $h=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，

由此得点 D_2 到平面 $ABCD$ 的距离为$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确；

平面 $A_2BC_1D_2$ 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角可转化为平面 $A_2BC_1D_2$ 与平面 MD_1C_1P 所成的锐二面角，

$\because MP\perp$平面 MAD_1N，$AN\subset$平面 MAD_1N，

$\therefore MP\perp AN$，正方形 MAD_1N 中，$MD_1\perp AN$，

又 MD_1，$MP\subset$平面 MD_1C_1P，$MD_1\cap MP=M$，

$\therefore AN\perp$平面 MD_1C_1P，

同理，$AP\perp$平面 $A_2BC_1D_2$，$\therefore$平面 $A_2BC_1D_2$ 与平面 MD_1C_1P 所成的锐二面角，等于直线 AP

与 AN 所成的角，由△APN 为等边三角形，可得所求锐二面角的平面角为60°，故 D 正确.

13.【答案】$1+2^{2\,023}$

【解析】令 $x=2$，则 $1=a_0+a_1+\cdots+a_{2\,023}$，

令 $x=1$，则$(-2)^{2\,023}=a_0$，

∴$a_1+\cdots+a_{2\,023}=1+2^{2\,023}$.

14.【答案】$\frac{27}{5}$

【解析】设上面球缺的高为 H，

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi RH+\pi[R^2-(H-R)^2]}{2\pi R(2R-H)+\pi[R^2-(H-R)^2]}=\frac{15}{7}$，

可得 $H=\frac{3R}{2}$，即$\frac{H_1}{H_2}=3$，∴$H_1=\frac{3R}{2}$，$H_2=\frac{R}{2}$，

$$\therefore\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi\left(3R-\frac{3}{2}R\right)\left(\frac{3}{2}R\right)^2}{\frac{1}{3}\pi\left(3R-\frac{1}{2}R\right)\left(\frac{1}{2}R\right)^2}=\frac{27}{5}.$$

15.【答案】$\frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，过 x 轴上定点$(n,0)$的直线方程为：$x=ty+n$，联立直线与抛物线的方程

$\begin{cases}x=ty+n,\\y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-2pty-2pn=0$，

∴$y_1y_3=y_2y_4=-2\sqrt{3}p$，$y_1y_2=-2\sqrt{2}p$，

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{2p}{y_1+y_2}}{\frac{2p}{y_3+y_4}}=\frac{\frac{2p}{y_1+y_2}}{\frac{2p}{\frac{-2\sqrt{3}p}{y_1}+\frac{-2\sqrt{3}p}{y_2}}}=\frac{-2\sqrt{3}p}{y_1y_2}=\frac{-2\sqrt{3}p}{-2\sqrt{2}p}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

16.【答案】$\frac{1}{\mathrm{e}}$

【解析】由题意可得 $\mathrm{e}^{\ln x-x}+\ln x-x\leqslant a+\ln a=\mathrm{e}^{\ln a}+\ln a$，构造函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x$，可知 $f(x)$ 是增函数，又 $f(\ln x-x)\leqslant f(\ln a)$，可得 $\ln x-x\leqslant\ln a$，再设 $g(x)=\ln x-x$，$g'(x)=\frac{1}{x}-1$，$g(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在区间$(1,+\infty)$上单调递减，∴$\ln a\geqslant g(x)_{\max}=g(1)=-1$，∴$a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$，故 $a_{\min}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

17. 解：(1) $2\sin 2B-2\sin(A-B)=1\Rightarrow\sin 2B-\sin(A-B)=\frac{1}{2}=\sin C=\sin(A+B)$，

于是 $2\sin B\cos B=2\sin A\cos B$.

∴$\sin A=\sin B$ 或者 $\cos B=0$，

当 $\sin A=\sin B$ 时，即 $a=b$，△ABC 为等腰三角形；

当 $\cos B=0$ 时，即 $B=\frac{\pi}{2}$，△ABC 为直角三角形. ………………………………………… 6 分

(2)当 $\sin A=\sin B$ 时，即 $a=b$，

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3}{2}$，

当 $B=\frac{\pi}{2}$时，$C=\frac{\pi}{6}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$，

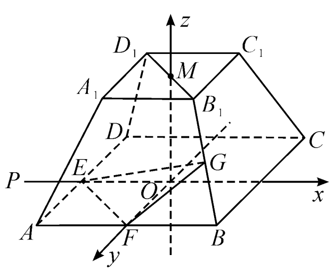
于是 $c=\sqrt{2}$，那么 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ca=\sqrt{3}$，

∴△ABC 的面积为$\frac{3}{2}$或$\sqrt{3}$. …………… 10 分

18. 解：(1) ∵$AB=2$，$A_1B_1=1$，侧棱 AA_1 与底面所成角为$\frac{\pi}{3}$，可得正四棱台的高 $h=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

∵$B_1D_1\,/\!/\,BD\,/\!/\,EF$，可知 $V_{E\text{-}FGM}=V_{M\text{-}EFG}=V_{B_1\text{-}EFG}$，即为定值，且 $V_{E\text{-}FGM}=V_{M\text{-}EFG}=V_{B_1\text{-}EFG}=V_{B\text{-}EFG}=V_{G\text{-}BEF}=\frac{1}{2}V_{B_1\text{-}BEF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{24}$. ……………………………… 6 分

(2)设 O 为正方形 $ABCD$ 的中心，建立如图所示的空间坐标系，



可知 $O(0,0,0)$，$A(-1,1,0)$，$B(1,1,0)$，$C(1,-1,0)$，$D(-1,-1,0)$，$E(-1,0,0)$，$F(0,1,0)$，$G\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，

则$\overrightarrow{EF}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{FG}=\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，

易知平面 $ABCD$ 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，设平面 EFG 的法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+y=0,\\\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{6}}{4}z=0,\end{cases}$

可得 $\boldsymbol{n}=\left(1,-1,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

设平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成的夹角为 θ，

$\therefore \cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=$

$$\left|\frac{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}{1\times\sqrt{1^2+(-1)^2+\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}}\right|=\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

即平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. …………………………………… 12 分

19. 解：(1) $n=2k-1$ 时，$a_{2k+1}+a_{2k-1}=0$，　①

$n=2k$ 时，$a_{2k+2}-a_{2k}=2$，　②

$n=2k+1$ 时，$a_{2k+3}+a_{2k+1}=0$，　③

③－①，得 $a_{2k+3}-a_{2k-1}=0$，

$\therefore \{a_{2k-1}\}$ 是首项为 1，公比为 -1 的等比数列，$\{a_{2k}\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列，

$\therefore a_{2k-1}=(-1)^{k-1}$，$a_{2k}=a_2+2(k-1)=2k+1$.

$S_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$=\dfrac{1-(-1)^n}{2}+n(n+2)$. ………………… 7 分

(2) $b_n=\dfrac{1}{4n^2}<\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{2(2n+1)}<\dfrac{5}{12}$. …… 12 分

20. 解：(1) 当 $\lambda=3$ 时，$f(x)=e^x-3\sin x$，$f'(x)=e^x-3\cos x$，设 $h(x)=e^x-3\cos x$，则 $h'(x)=e^x+3\sin x$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$h'(x)>0$，可知 $h(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递增，且 $h(0)=-2<0$，

$h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\approx0.072>0$，故 $\exists x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，

使得 $h(x_0)=e^{x_0}-3\cos x_0=0$，即 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减，在区间 (x_0,π) 上单调递增，则 $f_{\min}(x)=f(x_0)=e^{x_0}-3\sin x_0=3\cos x_0-3\sin x_0=3\sqrt{2}\cos\left(x_0+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，

故对任意 $x\in(0,\pi)$，都有 $f(x)>0$ 成立. … 4 分

(2) $\because g(x)=e^x+3\sin x-1-ax$，

$\therefore g'(x)=e^x+3\cos x-a$，

令 $\varphi(x)=g'(x)$，则 $\varphi'(x)=e^x-3\sin x$；

① $\because g(0)=0$，$\therefore x=0$ 是 $g(x)$ 的一个零点；

② 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，由 (1) 知：

当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\varphi'(x)=e^x-3\sin x>0$，

$\because$ 当 $x\in[\pi,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)=e^x-3\sin x>e^{\pi}-3>0$，$\therefore g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g'(0)=4-a>0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g(x)>g(0)=0$，即 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无零点；

③ 当 $x\in(-\pi,0)$ 时，$e^x>0$ 且 $\sin x<0$，

$\therefore \varphi'(x)=e^x-3\sin x>0$，

$\therefore g'(x)$ 在区间 $(-\pi,0)$ 上单调递增，

又 $g'(0)=4-a>0$，$g'(-\pi)=e^{-\pi}-3-a<0$，

$\therefore$ 存在 $t\in(-\pi,0)$，使得 $g'(t)=0$，

且当 $x\in(-\pi,t)$ 时，$g'(x)<0$；

当 $x\in(t,0)$ 时，$g'(x)>0$；

$\therefore g(x)$ 在区间 $(-\pi,t)$ 上单调递减，在区间 $(t,0)$ 上单调递增，

$\because g(-\pi)=e^{-\pi}-1+a\pi>-1+\pi>0$，

$g(t)<g(0)=0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(-\pi,t)$ 上恰有一个零点，

即 $g(x)$ 在区间 $(-\pi,0)$ 上有且仅有一个零点；

④ 当 $x\in\left(-\dfrac{3\pi}{2},-\pi\right)$ 时，$\because \cos x<0$，

$\therefore g'(x)=e^x+3\cos x-a<1-a<0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{3\pi}{2},-\pi\right)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)>g(-\pi)>0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{3\pi}{2},-\pi\right)$ 上无零点；

⑤ 当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，$g(x)=e^x+3\sin x-1-ax>0-3-1+\dfrac{3}{2}a\pi>\dfrac{3\pi}{2}-4>0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上无零点；

综上所述：$g(x)$ 有两个不同的零点. …… 12 分

21. 解：(1) 设乙的积分为 ξ，则 ξ 的可能取值为 0，1，2，3，4，6，

$P(\xi=0)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$，

$P(\xi=1)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$，

$P(\xi=2)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{72}$，

$P(\xi=3)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{18}$，

$P(\xi=4)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}$，

$P(\xi=6)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{24}$，

$\therefore \xi$的分布列为

ξ	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$

$E(\xi)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{72}+3\times\frac{5}{18}+4\times\frac{1}{18}+6\times\frac{1}{24}=\frac{3}{2}$. ………………………… 6 分

(2)若乙和丙积分相同,则只能同时积 1 分,2 分,3 分,4 分,

若乙和丙均积 1 分,则乙和丙比赛平局,甲和乙比赛甲获胜,甲和丙比赛甲获胜,

概率 $P_1=\frac{1}{12}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{36}$,

若乙和丙均积 2 分,则乙和丙比赛平局,甲和乙比赛平局,甲和丙比赛平局,

概率 $P_2=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{288}$,

若乙和丙均积 3 分,则乙和丙比赛乙获胜,甲和乙比赛甲获胜,甲和丙比赛丙获胜或乙和丙比赛丙获胜,甲和乙比赛乙获胜,甲和丙比赛甲获胜,概率 $P_3=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{72}$,

若乙和丙均积 4 分,则乙和丙比赛平局,甲和乙比赛乙获胜,甲和丙比赛丙获胜,

概率 $P_4=\frac{1}{12}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{288}$,

$\therefore$乙和丙积分相同的概率 $P=\frac{1}{36}+\frac{1}{288}+\frac{7}{72}+\frac{1}{288}=\frac{19}{144}$. ………………………………… 12 分

22. 解:(1)由题意知$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$2b=2$,得 $a=\sqrt{5}$,$c=2$,$b=1$. $\therefore$椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{5}+y^2=1$. …… 3 分

(2)① 当直线 l_1 的斜率不存在时,则方程为 $x=2$,则 l_2 的方程 $y=0$,此时四边形 $ACBD$ 的面积为 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=2$,

当 l_1 的斜率存在时,设 l_1 的方程为 $y=k(x-2)$,

联立直线 l_1 与椭圆 E 的方程$\begin{cases}y=kx-2k,\\ \frac{x^2}{5}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y,得$(5k^2+1)x^2-20k^2x+20k^2-5=0$,

由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{20k^2}{5k^2+1}$;$x_1x_2=\frac{20k^2-5}{5k^2+1}$,

于是 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{5}(1+k^2)}{5k^2+1}$,

同理可得$|CD|=\frac{2\sqrt{5}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{5\frac{1}{k^2}+1}=\frac{2\sqrt{5}(1+k^2)}{5+k^2}$;

于是得到 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1+5k^2}{2\sqrt{5}(1+k^2)}+\frac{5+k^2}{2\sqrt{5}(1+k^2)}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\geqslant\frac{2}{\sqrt{|AB||CD|}}$,

即$|AB||CD|\geqslant\frac{20}{9}$,当且仅当$|AB|=|CD|$,$k=\pm1$ 时等号成立.

那么四边形 $ACBD$ 的面积的最小值 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|AB||CD|\geqslant\frac{10}{9}$.

综上所述:四边形 $ACBD$ 的面积的最小值$\frac{10}{9}$.

………………………………………………… 7 分

②由题意知 M 为线段 AB 的中点,由①可得:

$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{10k^2}{5k^2+1}$,$y_M=kx_M-2k=\frac{-2k}{5k^2+1}$,

同理可得线段 CD 的中点 N 的坐标为:

$x_N=\frac{10}{5+k^2}$,$y_N=\frac{2k}{5+k^2}$,

由对称性可知,若直线 MN 是过定点,那么该定点必在 x 轴上,不妨设为 $P(n,0)$,

先由特殊情形:令 $x_M=x_N$ 即$\frac{10}{5+k^2}=\frac{10k^2}{5k^2+1}\Rightarrow k=\pm1$;此时 $n=x_M=x_N=\frac{5}{3}$.

下面验证一般情形下直线 MN 恒过点 $P\left(\frac{5}{3},0\right)$;

$$\frac{y_M}{x_M-\frac{5}{3}}=\frac{\frac{-2k}{5k^2+1}}{\frac{10k^2}{5k^2+1}-\frac{5}{3}}=\frac{-6k}{5k^2-5},$$

$$\frac{y_N}{x_N-\frac{5}{3}}=\frac{\frac{2k}{5+k^2}}{\frac{10}{5+k^2}-\frac{5}{3}}=\frac{-6k}{5k^2-5},$$

于是得到$\frac{y_M}{x_M-\frac{5}{3}}=\frac{y_N}{x_N-\frac{5}{3}}$,即 $k_{NP}=k_{MP}$,

$\therefore M,N,P$ 三点共线,

综上所述,直线 MN 过定点$\left(\frac{5}{3},0\right)$. …… 12 分

多维细目表

题型	题号	分值	必备知识	学科素养						预估难度		
				数学抽象	逻辑推理	数学建模	直观想象	数学运算	数据分析	易	中	难
选择题	1	5	集合的运算					√		√		
选择题	2	5	复数的四则运算					√		√		
选择题	3	5	三角恒等变换与运算					√		√		
选择题	4	5	充要条件判断		√					√		
选择题	5	5	直线与双曲线的交点个数				√	√		√		
选择题	6	5	解三角形		√	√		√			√	
选择题	7	5	函数奇偶性与单调性	√	√	√		√			√	
选择题	8	5	抽象函数的性质	√		√		√				√
选择题	9	5	统计的基本概念				√		√	√		
选择题	10	5	直线及其方程			√	√	√			√	
选择题	11	5	随机事件与条件概率		√			√			√	
选择题	12	5	立体几何元素相关关系与数量关系		√	√	√	√				√
填空题	13	5	二项式定理					√		√		
填空题	14	5	立体几何几何量计算			√		√		√		
填空题	15	5	抛物线与直线		√			√			√	
填空题	16	5	函数单调性与值域		√			√				√
解答题	17	10	解三角形		√			√		√		
解答题	18	12	线面关系、二面角		√		√	√		√		
解答题	19	12	数列的通项公式					√			√	
解答题	20	12	导数研究单调性			√		√				√
解答题	21	12	概率统计	√	√				√		√	
解答题	22	12	圆锥曲线综合应用		√		√	√				√