

邕衡金卷·南宁市第三中学（五象校区）

2024 届高三第一次适应性考试参考答案

数学

1. C 【解析】  $B = \{x | x > 2\}$ ,  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$   $\therefore A \cap B = \{3, 4\}$ .

2. B 【解析】 由  $(1+2i)z = 4+3i$  得  $z = 2-i$ , 则  $\bar{z} = 2+i$ .

3. B 【解析】  $C_5^1 A_2^2 + C_5^2 A_2^2 = 30$ . 共有 30 种不同的安排方案种数.

4. C 【解析】 由  $\begin{cases} 3-x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$  得  $-1 < x < 3$ ,

$f(x) = \log_a(-x^2+2x+3) = \log_a[-(x-1)^2+4]$  ( $0 < a < 1$ ), 又  $0 < -(x-1)^2+4 \leq 4$ , 因

为  $0 < a < 1$ , 所以  $\log_a[-(x-1)^2+4] \geq \log_a 4$ , 所以  $f(x)_{\min} = \log_a 4 = -2$ , 则

$$a = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

5. C 【解析】 因为  $F_1$ 、 $A$ 、 $F_2$ 、 $B$  四点共圆, 所以  $\angle F_1 B F_2 = 90^\circ$ , 所以

$$|B F_1|^2 + |B F_2|^2 = |F_1 F_2|^2. \text{ 又 } B F_1 + B F_2 = 2a. \text{ 且 } \angle O B F_1 = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore (2a-c)^2 + c^2 = (2c)^2, \text{ 解得离心率为 } \sqrt{3}-1.$$

6. C 【解析】 圆  $C: x^2 + y^2 + 4y = 0$  的圆心为  $(0, -2)$ , 半径  $r = 2$ , 当  $\triangle CMN$  的面积最大

时,  $CM \perp CN$ , 又  $CM = CN$ , 所以圆心  $C$  到直线  $l$  的距离  $\sqrt{2}$ , 即  $\frac{|2+m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ , 所以

$$m = 0 \text{ 或 } m = 4.$$

7. A 【解析】 由  $a_{n+1} + a_n = 2^{n+1} + 2^n$ , 得  $a_{n+1} - 2^{n+1} = -(a_n - 2^n)$ ,

所以  $\{a_n - 2^n\}$  是首项为  $a_1 - 2^1 = -1$ , 公比为  $-1$  的等比数列. 满足充分性. 由于公比的取值不确定, 故不满足必要性.

8. C 【解析】 由题意  $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + \sqrt{3}\cos 2\theta = 3$ , 则  $1 + 2\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta = 3$ ,

即  $\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta = 2$ , 故  $2\sin(2\theta + \frac{\pi}{3}) = 2$ , 即  $\sin(2\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$ , 由于  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,

所以  $2\theta + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ , 则  $2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $\theta = \frac{\pi}{12}$ ,

故  $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以,  $\tan \theta = 2 - \sqrt{3}$  (舍去负值).

9. BC 【详解】由题意可得:  $\bar{x} = \frac{2(1+2+\cdots+10)}{10} = 11$ ,

$\therefore y_i = x_i - 20$ , 则  $\bar{y} = \bar{x} - 20 = -9$ ,  $s_y^2 = s_x^2$ , 故 B 正确, A 错误;

由于求  $y_i$  第 30 百分位数:  $10 \times 0.3 = 3$ , 故为第 3 个数与第 4 个数的平均数,  $y_i$  的排列为:

-18, -16, -14, -12, ..., 因此, 第 30 百分位数为 -13, C 正确;

将两组数据合成一个样本容量为 20 的新的样本数据, 新样本的平均数为

$$\frac{10\bar{x} + 10\bar{y}}{20} = \frac{1}{2} \times 11 + \frac{1}{2} \times (-9) = 1, \text{ D 错误, 故选: BC.}$$

10. ACD 【详解】由图得  $A = 2$ ,  $\therefore \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$ , 即  $T = \pi$ ,  $\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ , 可得  $\omega = 2$ ,

则  $f(x) = 2 \cos(2x + \varphi)$ , 又  $f(\frac{2}{3}\pi) = 2 \cos(\frac{4\pi}{3} + \varphi) = -2$ , 故  $\frac{4\pi}{3} + \varphi = \pi + 2k\pi, k \in Z$ , 得

$\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$ , 又  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 则  $k = 0$  有  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ , 综上,  $f(x) = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ .

$\therefore f(\frac{\pi}{6}) = 2 \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 2$ , 即图象直线  $x = \frac{\pi}{6}$  对称, 故 A 正确;

$\therefore f(\frac{3\pi}{2}) = 2 \cos(3\pi - \frac{\pi}{3}) = 1 \neq 0$ , 即图象不关于点  $(\frac{3}{2}\pi, 0)$  对称, 故 B 错误;

$\therefore x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{24}]$ ,  $\therefore 2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}]$ ,  $\therefore \cos(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ ,  $\therefore f(x) \in [-\sqrt{2}, 2]$

故 C 正确; 将函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位, 得

$$g(x) = 2 \cos[2(x - \frac{\pi}{12}) - \frac{\pi}{3}] = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 2 \sin 2x, \text{ 故 D 正确; 故选 ACD.}$$

11. AC 【详解】令  $x = y = 0$ , 则  $f(0) + f(0) = 2f(0)f(0) \Rightarrow f(0) = 0$  或  $f(0) = 1$ , 又  $f(0) \neq 0$ ,

则  $f(0) = 1$ , 故 A 正确; 令  $x = 0$ , 则  $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y)$ ,  $\therefore f(y) = f(-y)$ , 所以  $f(x)$

是偶函数, 因此 B 错误. 令  $x = \frac{1}{2}$ , 则

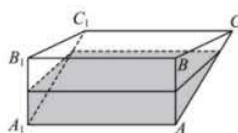
$$f(\frac{1}{2} + y) + f(\frac{1}{2} - y) = 2f(\frac{1}{2})f(y) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{2} + y) + f(\frac{1}{2} - y) = 0, \text{ 所以 } f(x) \text{ 关于 } (\frac{1}{2}, 0) \text{ 中}$$

心对称, 故 C 正确, 由  $f(x)$  关于  $(\frac{1}{2}, 0)$  中心对称可得  $f(x) = -f(1-x)$ , 结合  $f(x)$  是偶函

数, 所以  $f(x)$  的周期为 2, 令  $x=y=\frac{1}{2}$ , 则  $f(1)+f(0)=2f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ , 故  $f(1)+f(2)=f(1)+f(0)=0$ , 进而  $f(1)+f(2)+\dots+f(2022)=1011\times[f(1)+f(2)]=0$ , 而  $f(2023)=f(1)=-f(0)=-1$ , 故 D 错误. 故选: AC

12. AD 【详解】

A: 当平面  $AA_1C_1C$  水平放置时 ( $CC_1$  始终保持水平), 则

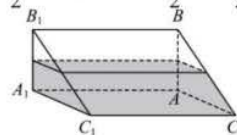


平面  $ABC \parallel$  平面  $A_1B_1C_1$ , 侧棱也平行, 所以没有水的部分一定是棱柱, 故 A 正确;

B: 当平面  $AA_1C_1C$  水平放置时, 假设  $D, E, F, G$  都为所在棱的中点, 设水面到底面的距离

为  $h$ ,  $AB=a, BC=b$ , 所以水的体积为  $V = S_{\triangle ABC} \cdot CC_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} b \cdot CC_1 = 2ab - \frac{1}{2} ab = \frac{3}{2} ab$ ,

又转动前水的体积为  $V = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{CC_1}{2} = \frac{1}{2} ab \times 2 = ab < \frac{3}{2} ab$ ,



所以  $D, E, F, G$  不为所在棱的中点, 故 B 错误;

C: 在翻滚、转动容器的过程中, 若有水的部分为三棱锥, 则当平面  $ABC$  作为底面,  $AA_1$  作

为高时, 三棱锥  $A_1-ABC$  的体积取到最大值, 此时  $V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times ab \times 4 = \frac{2}{3} ab$ ,

而转动前水的体积为  $V = ab > \frac{2}{3} ab$ , 所以有水的部分不可能是三棱锥, 故 C 错误;

D: 取  $AC, A_1C_1$  的中点  $D, D_1$ , 连接  $DD_1$ , 取  $DD_1$  的中点  $O$ , 连接  $OA$ , 则  $D$  为  $Rt\triangle ABC$  的

外接圆圆心,  $O$  为三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  外接球的球心, 所以  $OA$  为外接球的半径, 且

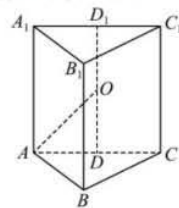
$OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ , 所以直三棱柱外接球体积  $V_{球} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot (2\sqrt{2})^3 = \frac{64\sqrt{2}}{3} \pi$ . 由选项 A

可知, 容器中水的体积为  $V_{水} = 2ab$ , 又  $a^2 + b^2 = 4^2 = 16$ , 所以  $16 = a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq 8$ ,

当且仅当  $a=b=2\sqrt{2}$  时等号成立, 所以  $V_{水} = 2ab \leq 16$ , 则水的体积与直三棱柱外接球体积之

比为  $\frac{2ab}{\frac{64\sqrt{2}}{3} \pi} \leq \frac{16}{\frac{64\sqrt{2}}{3} \pi} = \frac{3}{4\sqrt{2}\pi} = \frac{3\sqrt{2}}{8\pi}$ ,

即容器中水的体积与直三棱柱外接球体积之比至多为  $\frac{3\sqrt{2}}{8\pi}$ , 故 D 正确.



故选: AD.

13. 1 【详解】由  $f(0)=0$  得  $a=1$ .

14.  $\sqrt{17}$  【详解】因为向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}|=1$ ,  $|\vec{b}|=2$ ,  $\vec{a}-\vec{b}=(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ,

所以  $(\vec{a}-\vec{b})^2=5$ , 又  $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=5$ ,  $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ,

所以  $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$ .

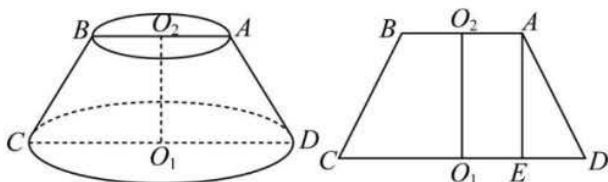
15.  $4\sqrt{3}\pi$  【详解】如图, 圆台的轴截面为等腰梯形  $ABCD$ , 作  $AE\perp CD$ , 设

$$AQ=r, DQ=R, QQ_2=h, AD=l, S_{ABCD}=\frac{(AB+CD)\times O_1O_2}{2}=\frac{(2r+2R)h}{2}=(r+R)h=6 \text{ ①},$$

又  $\angle DAB=120^\circ$ ,  $\angle BAE=90^\circ$ , 所以  $\angle DAE=30^\circ$ , 在  $Rt\triangle DAE$  中,

$$\cos 30^\circ=\frac{AE}{AD}=\frac{h}{l}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ②}, \text{ 由 ① ② 可得: } (r+R)l=4\sqrt{3}, \text{ 所以圆台的侧面积为}$$

$$\pi(r+R)l=4\sqrt{3}\pi.$$



16.  $\frac{29}{2}$  【详解】如图,  $k_{OD}=\frac{1-0}{-2-0}=-\frac{1}{2}$ ,  $\therefore OD\perp AB$ ,  $\therefore k_{AB}\cdot k_{OD}=-1$ ,  $\therefore k_{AB}=2$ , 因

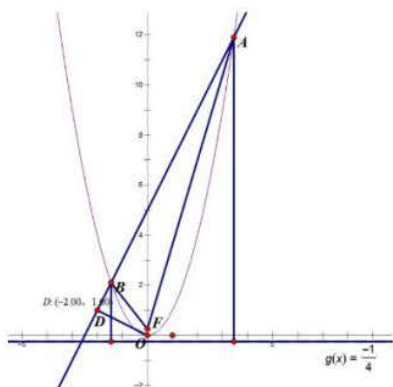
为点  $D(-2,1)$  在直线  $AB$  上, 所以  $l_{AB}: y-1=2(x+2)$  即  $y=2x+5$ , 联立  $\begin{cases} y=2x+5 \\ x^2=2py \end{cases}$  得:

$x^2-4px-10p=0$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 由韦达定理得  $\begin{cases} x_1+x_2=4p \\ x_1x_2=-10p \end{cases}$ , 所以

$\vec{OA}=(x_1, y_1), \vec{OB}=(x_2, y_2), \vec{OA}\cdot\vec{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\frac{x_1^2}{2p}\cdot\frac{x_2^2}{2p}=-10p+25=20$ , 故

$p=\frac{1}{2}$ , 所以  $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=-5 \end{cases}$ , 根据抛物线的定义, 准线为  $y=-\frac{1}{4}$ , 所以

$$|AF|+|BF|=y_1+\frac{1}{4}+y_2+\frac{1}{4}=2x_1+5+2x_2+5+\frac{1}{2}=2(x_1+x_2)+\frac{21}{2}=\frac{29}{2}.$$



17.解: (1)  $\because a=3, b-c=2, \cos B=-\frac{1}{2}$ .

$\therefore$  由余弦定理, 得  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 9 + (b-2)^2 - 2 \times 3 \times (b-2) \times (-\frac{1}{2})$ ,

$\therefore b=7, \therefore c=b-2=5$ ; .....5分

(2) 在  $\triangle ABC$  中,  $\because \cos B=-\frac{1}{2}, \therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

由正弦定理有:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \therefore \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ ,

$\therefore \sin(B+C) = \sin(\pi-A) = \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{14}$  .....5分

18. (1) 设事件  $A$  表示“抽出的 2 个球中有红球”, 事件  $B$  表示“两个球都是红球”, .....1分

则  $P(A) = 1 - \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{9}{10}$ , .....2分

$P(AB) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$ , .....3分

故  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}$  .....5分

(2) 设事件  $C$  表示“从乙箱中抽球”, 则事件  $\bar{C}$  表示“从甲箱中抽球”, 事件  $D$  表示“抽到红球”

$P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(\bar{C}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ , .....6分

$P(D|C) = \frac{4}{5}, P(D|\bar{C}) = \frac{3}{5}$  .....7分

$P(D) = P(CD) + P(\bar{C}D)$  .....8分

答案第 5 页, 共 9 页

$$= P(C)P(D|C) + P(\bar{C})P(D|\bar{C}) \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$P(C|D) = \frac{P(C)P(D|C)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{5} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19. (1) 由题意知:  $\frac{(-2)^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{6})^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ ,  $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

解得  $a=1$ ,  $b=\sqrt{2}$ ,

所以双曲线的方程为  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 。  $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 当直线  $l$  垂直  $x$  轴时, 因为过点  $P(1,1)$ , 所以直线  $l$  方程为  $x=1$ ,

又双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ , 右顶点为  $(1,0)$  在直线  $l$  上

所以直线  $l$  与双曲线只有一个交点, 不满足题意;  $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

当直线  $l$  不垂直  $x$  轴时, 斜率存在, 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 且  $x_1 \neq x_2$ , 因为  $A, B$  在双曲线上,

$$\text{所以} \begin{cases} x_1^2 - \frac{y_1^2}{2} = 1 \\ x_2^2 - \frac{y_2^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{两式相减可得 } (x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) = 0,$$

$$\text{所以 } (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{若点 } P(1,1) \text{ 为线段 } AB \text{ 的中点, 则} \begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases}, \text{代入上式,}$$

$$\text{所以 } x_1 - x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \text{ 则直线 } l \text{ 的斜率 } k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

所以直线  $l$  的方程为  $y-1=2(x-1)$ , 即  $y=2x-1$ ,  $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

将直线  $l$  与双曲线联立  $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ , 可得  $2x^2 - 4x + 3 = 0$ ,

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -8 < 0$ , 故方程无解, 所以不存在这样的直线  $l$ .

综上, 点  $P$  不能是线段  $AB$  的中点.....12分

20. 【详解】(1)  $\triangle CDH$ 中,  $CD = 4, CH = 2, \angle DCH = 60^\circ$ , 由余弦定理,  $DH = 2\sqrt{3}$ ,

所以  $DH^2 + CH^2 = CD^2$ , 即  $DH \perp AC$ . .....1分

$\because$  平面  $ADFC \perp$  平面  $ABC$ , 平面  $ADFC \cap$  平面  $ABC = AC$ ,  $DH \subset$  平面  $ADFC$ ,

$\therefore DH \perp$  平面  $ABC$ , .....3分

而  $BC \subset$  平面  $ABC$ , 即有  $DH \perp BC$ . .....4分,

又  $BH \perp BC$

$\therefore BC \perp$  平面  $BHD$ .  $\therefore BC \perp BD$  .....5分

由棱台的定义可知,  $EF \parallel BC$ ,  $\therefore EF \perp DB$ . .....6分

(2)

$Rt\triangle BCH$ 中,  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $\therefore \frac{DF}{AC} = \frac{1}{2}, S_{\triangle DEF} = \frac{3\sqrt{3}}{16}, \therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4}, S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ .

又  $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin 30^\circ, \therefore AC = 3 = AH + HC, \therefore AH = 1$  .....7分

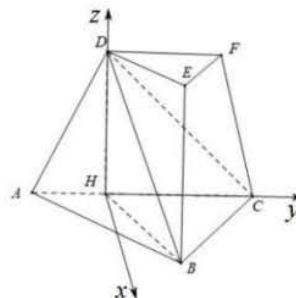
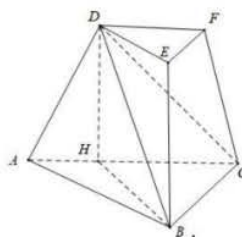
由 (1) 知  $DH \perp$  平面  $ABC$ , 所以可以  $H$  为原点,  $\overrightarrow{HC}$  为  $y$  轴,  $\overrightarrow{HD}$  为  $z$  轴建系如图 .....8分

则  $A(0, -1, 0), B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), D(0, 0, 2\sqrt{3}), C(0, 2, 0), F(0, \frac{3}{2}, 2\sqrt{3})$ , .....9分

$\overrightarrow{AB} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0), \overrightarrow{AD} = (0, 1, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{CF} = (0, -\frac{1}{2}, 2\sqrt{3})$ ,

设平面  $ABD$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0 \\ y + 2\sqrt{3}z = 0 \end{cases}$ , 取  $\vec{n} = (6, -2\sqrt{3}, 1)$ , .....10分



设CF与平面ABD的夹角为 $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{CF}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{CF} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{CF}| |\vec{n}|} = \frac{3\sqrt{3}}{7 \times \frac{7}{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{49} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

21.解析: (1) 由题意知:

当 $n = 1$ 时:  $a_1 q = 2a_1 + 2$  ①

当 $n = 2$ 时:  $a_1 q^2 = 2(a_1 + a_1 q) + 2$  ②

联立①②, 解得 $a_1 = 2, q = 3$ .....2分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ .....4分

(基本量一个一分、结果2分)

(2) 由(1)知 $a_n = 2 \times 3^{n-1}, a_{n+1} = 2 \times 3^n$ .

所以 $a_{n+1} = a_n + (n+2-1)d$

所以 $d_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1} = \frac{4 \times 3^{n-1}}{n+1}$ .....6分

设数列 $\{d_n\}$ 中存在3项 $d_m, d_k, d_p$ , (其中 $m, k, p$ 成等差数列)成等比数列.

则 $d_k^2 = d_m \cdot d_p$ ,

所以 $\left(\frac{4 \times 3^{k-1}}{k+1}\right)^2 = \frac{4 \times 3^{m-1}}{m+1} \cdot \frac{4 \times 3^{p-1}}{p+1}$ , 即 $\left(\frac{4 \times 3^{k-1}}{k+1}\right)^2 = \frac{4^2 \times 3^{m+p-2}}{(m+1)(p+1)}$ .....7分

又因为 $m, k, p$ 成等差数列,

所以 $2k = m + p$ .....8分

所以 $(k+1)^2 = (m+1)(p+1)$ .....9分

化简得 $k^2 + 2k = mp + m + p$

所以 $k^2 = mp$ .....10分

又 $2k = m + p$ , 所以 $k = m = p$ 与已知矛盾.....11分

所以在数列 $\{d_n\}$ 中不存在3项 $d_m, d_k, d_p$ 成等比数列.....12分 ( $d_n$ 得2

分、等差中项1分、等比中项得到式子1分、式子化简2分、求解1、结论1分)

22解: (1)由已知条件得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ,

$$f'(x) = x - \frac{a}{x} + 1 - a = \frac{x^2 + (1-a)x - a}{x} = \frac{(x-a)(x+1)}{x}, \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

因为 $x > 0, x+1 > 0$

①当 $a \leq 0$ 时,  $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递增...2分



②当 $a > 0$ 时, 当 $x > a$ 时,  $f'(x) > 0$ , 当 $(0, a)$ 时,  $f'(x) < 0$

故 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上为单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上为单调递增: .....4分

综上所述: 当 $a \leq 0$ 时,  $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递增

当 $a > 0$ 时,  $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上为单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上为单调递增.....5分

(2)当 $a = 1$ 时,  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x + 1$

要证原式成立, 需证 $\ln x + 1 \leq x(e^x - 1)$ 成立, 即需证 $xe^x - \ln x - x - 1 \geq 0$ 成立...6分

令 $g(x) = xe^x - \ln x - x - 1 (x > 0)$ , 则 $g'(x) = e^x + xe^x - \frac{1}{x} - 1 = (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$ , ..7分

令 $u(x) = e^x - \frac{1}{x}$ , 则 $u'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ , 故 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, .....8分

$u\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$ ,  $u(1) = e - 1 > 0$ , 由零点存在性定理可知, 存在 $x_0$ 使 $u(x_0) = 0$ ,

则在 $(0, x_0)$ 上 $u(x) < 0$ , 在 $(x_0, +\infty)$ 上 $u(x) > 0$ ,

即在 $(0, x_0)$ 上 $g'(x) < 0$ , 在 $(x_0, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$ , .....9分

则 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增, 在 $x = x_0$ 处取得最小值...10分

由 $u(x_0) = 0$ 可得 $u(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$ , 即 $e^{x_0}x_0 = 1$ ,

两边同取对数 $\ln(e^{x_0}x_0) = \ln 1$ , 即 $x_0 + \ln x_0 = 0$ , .....11分

$g(x)$ 的最小值为 $g(x_0) = x_0e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 - 1 = 0$ , 即 $xe^x - \ln x - x - 1 \geq 0$ 成立...12分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

