

19. (12分)

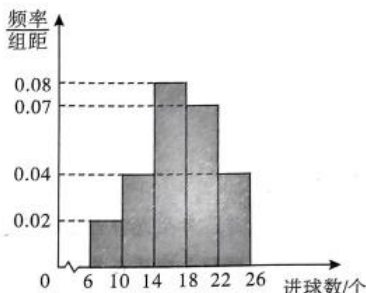
为增强学生体质,某校高一(1)班组织全班同学参加限时投篮活动,记录他们在规定时间内的进球个数,将所得数据分成 $[6, 10)$ ,  $[10, 14)$ ,  $[14, 18)$ ,  $[18, 22)$ ,  $[22, 26]$ 这5组,并得到如下频率分布直方图:

(1)估计全班同学的平均进球个数.(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

(2)现按比例分配的分层随机抽样方法,从进球个数在 $[10, 14)$ ,  $[14, 18)$ ,  $[22, 26]$ 内的同学中抽取8人进行培训,再从中抽取3人做进一步培训.

(i)记这3人中进球个数在 $[14, 18)$ 的人数为 $X$ ,求 $X$ 的分布列与数学期望;

(ii)已知抽取的这3人的进球个数不全在同一区间,求这3人的进球个数在不同区间的概率.



20. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ ,  $\triangle ABC$ 的面积为 $S$ ,已知 $\frac{2S}{b^2} =$

$$\frac{\sin 2A}{\tan B} + 2\cos^2 A.$$

(1)求 $\tan A$ ;

(2)若 $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}\sin C$ ,  $D$ 为 $BC$ 的中点,  $AD = 2\sqrt{5}$ ,求 $a$ 的值.

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为2,离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(1)求椭圆 $C$ 的方程;

(2)椭圆 $C$ 的左、右顶点分别为 $A, B$ ,直线 $l$ 经过点 $(1, 0)$ ,且与椭圆 $C$ 交于 $M, N$ 两点(均异于 $A, B$ 两点),直线 $AM, BN$ 的倾斜角分别记为 $\alpha, \beta$ ,试问 $\alpha - \beta$ 是否存在最大值?若存在,求当 $\alpha - \beta$ 取最大值时,直线 $AM, BN$ 的方程;若不存在,说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = ke^x + (\ln x)^2 - x$ ,其中 $k > 0$ .

(1)当 $k = \frac{1}{e}$ 时,证明: $f(x) \geq 0$ ;

(2)若对任意 $x \in (0, +\infty)$ ,都有 $f(x) \geq (x + \ln k)^2$ ,求 $k$ 的取值范围.

★开封前注意保密

2024 年普通高中高三级教学质量测试

数 学

本试题共 4 页，考试时间 120 分钟，满分 150 分

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的信息填写清楚、准确，将条形码准确粘贴在条形码粘贴处。
2. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效。
3. 答题时请按要求用笔，保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不得使用涂改液、修正带、刮纸刀。考试结束后，请将本试题及答题卡交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{x \mid 1 < x^2 < 9\}$ ， $N = \{x \mid -2 < x < 1\}$ ，则  $M \cap N =$   
A.  $\{x \mid -3 < x < -1\}$                       B.  $\{x \mid -2 < x < -1\}$   
C.  $\{x \mid -3 < x < 3\}$                          D.  $\{x \mid -3 < x < 3 \text{ 且 } x \neq 1\}$
2. 在复平面内，复数  $z$  对应的点的坐标为  $(1, -1)$ ，则  $\frac{z}{1} - 2i =$   
A.  $-1 - 3i$                       B.  $1 - i$                       C.  $1 - 3i$                       D.  $-1 + i$
3. 设  $a = \lg 4$ ， $b = \log_3 0.9$ ， $c = 2^{0.1}$ ，则  
A.  $a < b < c$                       B.  $a < c < b$                       C.  $b < a < c$                       D.  $b < c < a$
4. 从 2019 年初，某生产新能源汽车零件的企业不断引进技术，此后每年的零件销售额均比上一年增加 15%，已知该企业从 2019 年到 2023 年底的零件总销售额为 202 万元，则该企业 2019 年的销售额约为(参考数据： $1.15^4 \approx 1.75$ ， $1.15^5 \approx 2.01$ )  
A. 30 万元                      B. 35.2 万元                      C. 40.4 万元                      D. 42.3 万元
5. 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $(-3, 2\sqrt{3})$ ，则  $\tan\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) =$   
A.  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$                       B.  $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$                       C.  $2\sqrt{3}$                       D.  $-2\sqrt{3}$
6. 数学家欧拉在 1765 年发现了九点圆，即在任意的三角形中，三边的中点、三条高的垂足、三条高的交点(垂心)与三角形顶点连线的中点，这九个点共圆，因此九点圆也称作欧拉圆. 已知在  $\triangle ABC$  中， $A(-2, 0)$ ， $B(4, 4)$ ， $C(2, 2)$ ，则  $\triangle ABC$  的九点圆的半径为  
A.  $\frac{\sqrt{110}}{3}$                       B.  $\frac{\sqrt{130}}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{110}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{130}}{2}$

高三·数学 第 1 页(共 4 页)

7. 已知两圆锥的底面积分别为 $\frac{\pi}{4}$ ,  $4\pi$ , 其侧面展开图中圆心角之和为 $2\pi$ , 则两圆锥的母线长之和的最小值为
- A.  $\frac{7}{2}$                       B.  $\frac{9}{2}$                       C. 4                      D. 5
8. 函数 $f(x) = \ln \frac{x-2}{x} + x - 1$ 的所有零点之和为
- A. -2                      B. -1                      C. 1                      D. 2

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 2023年入冬以来，流感高发，某医院统计了一周中连续5天的流感就诊人数 $y$ 与第 $x$  ( $x = 1, 2, 3, 4, 5$ )天的数据如表所示.

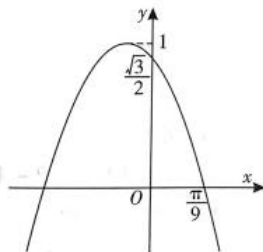
$x$	1	2	3	4	5
$y$	21	$10a$	$15a$	90	109

- 根据表中数据可知 $x, y$ 具有较强的线性相关关系，其经验回归方程为 $\hat{y} = 20x + 10$ ，则
- A. 样本相关系数在 $(0, 1]$ 内                      B. 当 $x = 2$ 时，残差为-2
- C. 点 $(3, 15a)$ 一定在经验回归直线上                      D. 第6天到该医院就诊人数的预测值为130
10. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$ ，若 $f(2-x)$ 是不恒为0的奇函数，则
- A.  $f(2) = 0$                       B.  $f(2-x) + f(x-2) = 0$
- C.  $f(x+2)$ 为奇函数                      D.  $f'(x+2)$ 为偶函数

11. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ )的图象过点 $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{\pi}{9}, 0)$ ,

其部分图象如图所示，则

- A.  $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- B.  $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{18}$ 对称
- C.  $f(x)$ 在区间 $[\pi, \frac{11\pi}{9}]$ 上单调递增
- D. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{4\pi}{9}$ 个单位后所得图象关于原点对称



12. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ )的焦点为 $F(\frac{1}{2}, 0)$ ，经过点 $M(2, 1)$ 的直线 $l$ 与 $C$ 交于 $A, B$ 两点，且抛物线 $C$ 在 $A, B$ 两点处的切线交于点 $P$ ， $D$ 为 $AB$ 的中点，直线 $PD$ 交 $C$ 于点 $E$ ，则
- A. 点 $P$ 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上                      B.  $E$ 是 $PD$ 的中点
- C.  $|FA| \cdot |FB| = |FP|^2$                       D.  $PD \perp y$ 轴

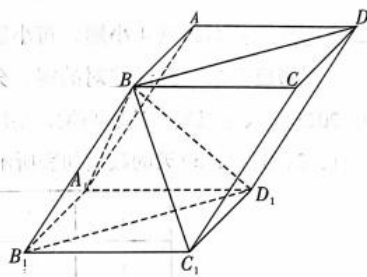
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量  $a = (-7, 6)$ ,  $b = (5, -3)$ , 则  $|a+b| =$  \_\_\_\_\_.

14. 在二项式  $(x + \frac{a}{2x})^6$  的展开式中, 若常数项恰是所有奇数项的二项式系数之和的 5 倍, 则实数  $a$  的值为 \_\_\_\_\_ . (用数字作答)

15. 若双曲线的同一支上存在两点  $A, B$ , 使得  $\triangle OAB$  ( $O$  为原点) 为等边三角形, 则称双曲线为“优美双曲线”, 已知双曲线  $C$  是“优美双曲线”, 则  $C$  的离心率的取值范围是 \_\_\_\_\_.

16. 如图, 在四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为正方形,  $AB = 4$ ,  $A_1B = BC_1$ ,  $BB_1 \perp BD_1$ , 且二面角  $B_1 - BD_1 - C_1$  的正切值为  $\sqrt{2}$ . 若点  $P$  在底面  $ABCD$  上运动, 点  $Q$  在四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  内运动,  $D_1Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则  $PB_1 + PQ$  的最小值为 \_\_\_\_\_.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列  $\{a_n - n^2\}$  为等差数列,  $a_2 = 9$ ,  $a_3 = 16$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

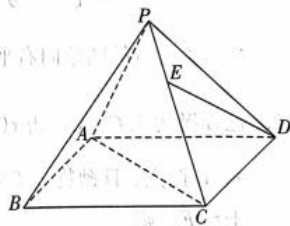
(2) 设数列  $\{\frac{1}{a_n - 1}\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 证明:  $S_n < \frac{3}{4}$ .

18. (12 分)

如图, 在四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为平行四边形,  $\triangle PAC$  为等边三角形,  $BC = 2AB = 2$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $AB \perp PC$ , 点  $E$  满足  $\vec{PC} = 3\vec{PE}$ .

(1) 证明: 平面  $PAC \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 求直线  $DE$  与平面  $PAB$  所成角的正弦值.



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线