

长郡中学 2024 年高三寒假作业检测试卷

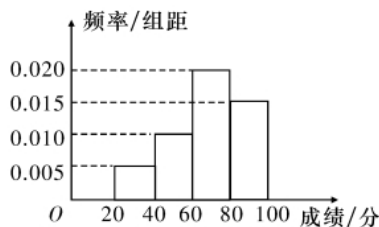
数 学

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。)

- 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的
 - 充分而不必要条件
 - 必要而不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 某班的全体学生参加数学测试,成绩的频率分布直方图如图,数据的分组依次为 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$ 。若低于 60 分的人数是 15, 则该班的学生人数是



- 40
 - 45
 - 50
 - 60
- 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_4 = 4, S_9 = 72$, 则 $a_{10} =$
 - 20
 - 23
 - 24
 - 28
 - 已知平面向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 3\sqrt{2}, |\mathbf{b}| = 1$, 并且当 $\lambda = -4$ 时, $|\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}|$ 取得最小值, 则 $\sin\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$
 - $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 - $\frac{1}{3}$
 - $\frac{\sqrt{15}}{4}$
 - $\frac{1}{4}$
 - 已知一个圆锥的高与其底面圆的半径相等, 且体积为 $\frac{8\pi}{3}$. 在该圆锥内有一个正方体, 其下底面的四个顶点在圆锥的底面内, 上底面的四个顶点在圆锥的侧面上, 则该正方体的棱长为
 - $\frac{2}{3}$
 - 1
 - $2 - \sqrt{2}$
 - $4 - 2\sqrt{2}$

三、填空题(本大题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.)

12. 二项式 $(x^2 + \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, x 的系数为_____.

★13. 已知样本数据 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 都为正数,其方差 $s^2 = \frac{1}{5}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 80)$,则样本数据 $2a_1 + 3, 2a_2 + 3, 2a_3 + 3, 2a_4 + 3, 2a_5 + 3$ 的平均数为_____.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ,过点 F 作倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点,弦 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 P ,若 $\frac{|PF|}{|AB|} = \frac{1}{4}$,则椭圆 C 的离心率 $e =$ _____.

四、解答题(本大题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

15. (本小题满分 13 分)

某学校进行班级之间的中国历史知识竞赛活动,甲、乙两位同学代表各自班级以抢答的形式展开,共五道题,抢到并回答正确者得一分,答错则对方得一分,先得三分者获胜.每一次抢题且甲、乙两人抢到每道题的概率都是 $\frac{1}{2}$,甲、乙正确回答每道题的概率分别为 $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$,且两人各道题是否回答正确均相互独立.

- (1) 比赛开始,求甲先得一分的概率;
- (2) 求甲获胜的概率.

16. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \sin x - ax^2 (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若 $a = 0$,求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值和最大值;
- (2) 若 $a < \frac{1}{2}$,求证: $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值.

17. (本小题满分 15 分)

如图 1, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 将正方形 $ABCD$ 沿 EF 折成如图 2 所示的二面角, 且二面角的大小为 60° , 点 M 在线段 AB 上 (包含端点) 运动, 连接 AD .

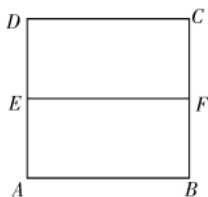


图1

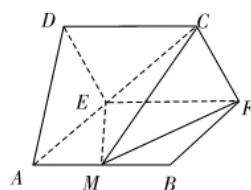


图2

- (1) 若 M 为 AB 的中点, 直线 MF 与平面 ADE 的交点为 O , 试确定点 O 的位置, 并证明直线 $OD \parallel$ 平面 EMC ;
- (2) 是否存在点 M , 使得直线 DE 与平面 EMC 所成的角为 60° ? 若存在, 确定出 M 点的位置; 若不存在, 请说明理由.

★18. (本小题满分 17 分)

已知 M, N 为椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 和双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的公共顶点, e_1, e_2 分别为 C_1 和 C_2 的离心率.

(1) 若 $e_1 e_2 = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

(i) 求 C_2 的渐近线方程;

(ii) 过点 $G(4, 0)$ 的直线 l 交 C_2 的右支于 A, B 两点, 直线 MA, MB 与直线 $x = 1$ 相交于 A_1, B_1 两点, 记 A, B, A_1, B_1 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$, 求证:

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4};$$

(2) 从 C_2 上的动点 $P(x_0, y_0) (x_0 \neq \pm a)$ 引 C_1 的两条切线, 经过两个切点的直线与 C_2 的两条渐近线围成三角形的面积为 S , 试判断 S 是否为定值? 若是, 请求出该定值; 若不是, 请说明理由.

19. (本小题满分 17 分)

已知 $A_m = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix}$ ($m \geq 2$) 是 m^2 个正整数组成的 m 行 m 列的数表, 当 $1 \leq i <$

$s \leq m, 1 \leq j < t \leq m$ 时, 记 $d(a_{i,j}, a_{s,t}) = |a_{i,j} - a_{s,j}| + |a_{s,j} - a_{s,t}|$. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 若 A_m 满足如下两个性质:

- ① $a_{i,j} \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, m$);
 ② 对任意 $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, 存在 $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, 使得 $a_{i,j} = k$, 则称 A_m 为 Γ_n 数表.

(1) 判断 $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是否为 Γ_3 数表, 并求 $d(a_{1,1}, a_{2,2}) + d(a_{2,2}, a_{3,3})$ 的值;

(2) 若 Γ_2 数表 A_4 满足 $d(a_{i,j}, a_{i+1,j+1}) = 1$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$), 求 A_4 中各数之和的最小值;

(3) 证明: 对任意 Γ_4 数表 A_{10} , 存在 $1 \leq i < s \leq 10, 1 \leq j < t \leq 10$, 使得 $d(a_{i,j}, a_{s,t}) = 0$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线