2023~2024 学年第一学期高三年级期末学业诊断

数学试卷

（考试时间：上午 8:00—10:00）

说明：本试卷为闭卷笔答，答题时间 120 分钟，满分 150 分。

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.已知集合 $A=\left\{x \mid x^2-2x\le 0\right\}$，$B=\left\{x \mid 2^x>2\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $[0,+\infty)$　　B. $[0,1)$　　C. $(1,2]$　　D. $[2,+\infty)$

2.已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则 z 在复平面内对应的点的坐标为（　　）

A. $(1,1)$　　B. $(-1,1)$　　C. $(1,-1)$　　D. $(-1,-1)$

3.圆 $x^2+y^2-4x+2y=0$ 的圆心坐标为（　　）

A. $(2,-1)$　　B. $(-2,1)$　　C. $(4,-2)$　　D. $(-4,2)$

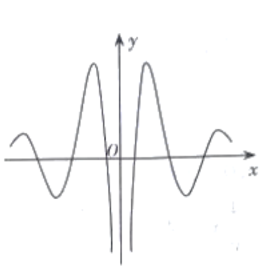
4.第 19 届亚运会于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在杭州等城市成功举办.杭州亚运会期间，甲、乙等 4 名志愿者要到游泳、射击、体操三个场地进行志愿服务，每名志愿者只去一个场地，每个场地至少一名志愿者，若甲不去游泳场地，则不同的安排方法种数为（　　）

A.18　　B.24　　C.32　　D.36

5.已知 α，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan\alpha=3$，$\tan\beta=2$，则 $\alpha+\beta=$（　　）

A. $\dfrac{5\pi}{12}$　　B. $\dfrac{2\pi}{3}$　　C. $\dfrac{3\pi}{4}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

6.如图是函数 $f(x)$ 的部分图象，则 $f(x)$ 的解析式为（　　）



A. $f(x)=\dfrac{\sin 6x}{2^x-2^{-x}}$　　B. $f(x)=\dfrac{\cos 6x}{2^x-2^{-x}}$

C. $f(x)=\dfrac{\sin 6x}{2^{-x}-2^x}$　　D. $f(x)=\dfrac{\cos 6x}{2^{-x}-2^x}$

7.已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 M 为 C 上异于长轴端点的任意一点，$\angle F_1MF_2$

的角平分线交线段 F_1F_2 于点 N，则 $\dfrac{|MF_1|}{|NF_1|}=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

8.若实数 a，b，c 满足 $a=\log_3\pi$，$b=\ln\pi$，$c=\sqrt{\pi}\ln 2$，则（　　）

A. $a<b<c$　　　　B. $a<c<b$　　　　C. $b<a<c$　　　　D. $b<c<a$

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9.已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则下列结论正确的是（　　）

A. $\{a_n\}$ 是等比数列　　　　B. $a_4=15$

C. $a_{10}<1000$　　　　D. $S_n=2a_n-n$

10.已知函数 $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x$，则下列结论正确的是（　　）

A. $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称

C. $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递增

D.将 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，再向下平移 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 个单位长度后得到的函数图象关于原点对称

11.已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,0<x<\mathrm{e}\\ \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^2}-\dfrac{4}{\mathrm{e}}x+4,x\ge\mathrm{e}\end{cases}$，若方程 $f(x)=a$ 有四个不同的实数解 x_1，x_2，x_3，x_4，且满足 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则下列结论正确的是（　　）

A. $0<a<1$　　　　B. $2x_1+x_2\in[2\sqrt{2},3)$

C. $x_1+x_2+x_3+x_4\in\left(4\mathrm{e}+2,5\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　　　D. $x_1x_2x_3x_4\in\left(3\mathrm{e}^2,4\mathrm{e}^2\right)$

12.在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 B_1C 的中点，点 P 和 Q 分别满足 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1C_1}$，$\overrightarrow{D_1Q}=\mu\overrightarrow{D_1B}$，其中 λ，$\mu\in[0,1]$，则下列结论正确的是（　　）

A.当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，三棱锥 $Q-PDE$ 的体积为定值

B.当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，四棱锥 $Q-ABCD$ 的外接球的表面积是 $\dfrac{9\pi}{4}$

C.当 $\lambda=1$ 时，不存在 μ 使得 $PQ\perp B_1D_1$

D. $PQ+EQ$ 的最小值为 $\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13.双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的渐近线方程为______.

14. $\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)(1-2x)^4$ 的展开式中常数项为______.

15.已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\dfrac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ 的最小值为______.

16.已知实数 λ，k 分别满足 $\lambda e^{\lambda}=e^2$，$k(\ln k-1)=e^3$，其中 e 是自然对数的底数，则 $\lambda k=$______.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题 10 分）

已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=3$，$a_8=3a_3$，S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，且满足 $2S_n=3b_n-1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=a_nb_n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（本小题 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 的对边，点 D 在线段 BC 上，$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}$，$AD=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$.

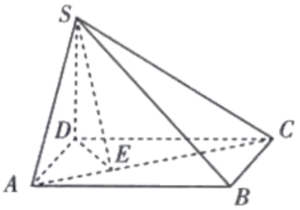
（1）当 $\lambda=2$，且 $\angle ADB=60^\circ$ 时，求 B；

（2）当 $\lambda=1$，且 $b^2+c^2=28$ 时，求 $\triangle ABC$ 的周长.

19.（本小题 12 分）

“阳马”是我国古代数学名著《九章算术》中《商功》章节研究的一种几何体，即其底面为矩形，一条侧棱垂直于底面的四棱锥.如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$SA\perp AB$，

$SC \perp BC$，$SA = SC = 3\sqrt{2}$.



（1）证明：四棱锥 $S-ABCD$ 是一个"阳马"；

（2）已知点 E 在线段 AC 上，且 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{EC}$，若二面角 $A-SE-D$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{30}}{15}$，求直线 SE 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值.

20.（本小题 12 分）

为了避免就餐聚集和减少排队时间，某校食堂从开学第 1 天起，每餐只推出即点即取的米饭套餐和面食套餐.某同学每天中午都会在食堂提供的两种套餐中选择一种套餐，如果他第 1 天选择了米饭套餐，那么第 2 天选择米饭套餐的概率为 $\frac{1}{3}$；如果他第 1 天选择了面食套餐，那么第 2 天选择米饭套餐的概率为 $\frac{2}{3}$.已知他开学第 1 天中午选择米饭套餐的概率为 $\frac{2}{3}$.

（1）求该同学开学第 2 天中午选择米饭套餐的概率；

（2）记该同学第 $n\left(n \in \mathbf{N}^*\right)$ 天选择米饭套餐的概率为 P_n，

（i）证明：$\left\{P_n - \frac{1}{2}\right\}$ 为等比数列；

（ii）证明：当 $n \geq 2$ 时，$P_n < \frac{5}{9}$.

21.（本小题 12 分）

已知抛物线 $C: y^2 = 2px(p > 0)$ 的准线与 x 轴相交于点 D，过抛物线 C 焦点 F 的直线与 C 相交于 A，B 两点，$\triangle DAB$ 面积的最小值为 4.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）若过点 $E(5,2)$ 的动直线 l 交 C 于 M，N 两点，试问抛物线 C 上是否存在定点 P，使得对任意的直线 l，都有 $PM \perp PN$.若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，则说明理由.

22.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x) = x\ln x - (k-1)x + k$，$k \geq 1$.

（1）当 $k = 1$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

（2）当 $x \in (1, +\infty)$ 时，不等式 $f(x) > 0$ 恒成立，求实数 k 取得的最大整数值.