# 2024年天津市八所重点学校高三毕业班联考
# 数学试卷 评分标准

**一．选择题：本题共9小题，每小题5分，共45分．**

1. B 2. B 3. C 4. A 5.C 6.D 7. A 8. A 9.B

**二．填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．试题中包含2个空的，答对1个空的得3分，全部答对的得5分．**

10．2　　11．$-10$　　12．$\pm\sqrt{3}$，$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$（四个答案写出其中一个即可）

13．正，0.99　　14．3，$\frac{\sqrt{21}}{2}$　　15．$(-\infty,0]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)\cup\left\{\frac{1}{e^3}\right\}$

**三. 解答题(本大题5小题，共75分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．)**

**16．（本小题满分14分）**

（1）解：

法一：

由$c-2b+2a\cos C=0$，根据正弦定理有$\sin C-2\sin B+2\sin A\cos C=0$，　..............1分

因为$\sin B=\sin(A+C)$，所以

$\sin C-2\sin(A+C)+2\sin A\cos C=\sin C-2\sin A\cos C-2\cos A\sin C+2\sin A\cos C=0$

整理得$\sin C-2\cos A\sin C=0$，　..............2分

因为$\sin C\neq 0$，所以$\cos A=\frac{1}{2}$因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$　..............4分

法二：

由$c-2b+2a\cos C=0$，根据余弦定理有$c-2b+2a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$　..............1分

整理得$bc-2b^2+a^2+b^2-c^2=0$，即$b^2+c^2-a^2=bc$　.............2分

$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$　.............4分

（2）因为$a=\sqrt{3}$,$c=\frac{\sqrt{6}}{2}$,由（1）知$A=\frac{\pi}{3}$

（i）由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sin C}$，$\therefore\sin C=\frac{\sqrt{6}}{4}$　..............5分

又因为$c<a$，所以$\angle C$为锐角，$\therefore\cos C=\frac{\sqrt{10}}{4}$　.............6分

所以 $\sin 2C=2\sin C\cos C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$， $\cos 2C=1-2\sin^2 C=\dfrac{1}{4}$ …………8 分

所以 $\sin(2C+A)=\sin 2C\cos A+\cos 2C\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$ ……10 分

（ii）法一：由 $c-2b+2a\cos C=0$，将 $a=\sqrt{3}$，$c=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\cos C=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ 代入，

解得 $b=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{4}$， …………12 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{16}$ …………14 分

法二：$\because \sin B=\sin(C+A)$

$\therefore \sin B=\sin C\cos A+\cos C\sin A=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{8}$ …………12 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{8}=\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{16}$. …………14 分

**17. （本小题满分 15 分）**

（1）证明：法一：

取 $CD$ 的中点 $M$，连接 $EM$

因为 $AB\,//\,CD$，$AB=\dfrac{1}{2}CD$，所以 $AB\parallel DM$，且 $AB=DM$，

所以四边形 $ADMB$ 为平行四边形，所以 $AD\,//\,BM$，且 $AD=BM$， …………2 分

又因为四边形 $ADEF$ 为正方形，

所以 $EF\,//\,BM$，且 $EF=BM$，所以四边形 $FEMB$ 为平行四边形， …………3 分

所以 $BF\,//\,EM$，又因为 $BF\not\subset$ 面$CDE$，$EM\subset$ 面$CDE$ …………4 分

所以 $BF\,//$ 平面 $CDE$.

法二：

因为 $AB\,//\,CD$，$AB\not\subset$ 面$CDE$，$CD\subset$ 面$CDE$，

所以 $AB\,//$ 平面 $CDE$， …………2 分

同理，$AF\,//$ 平面 $CDE$，又 $AB\cap AF=A$，所以平面 $ABF\parallel$ 平面 $CDE$， …………3 分

因为 $BF\subset$ 平面 $ABF$， …………4 分

所以 $BF\parallel$ 平面 $CDE$.

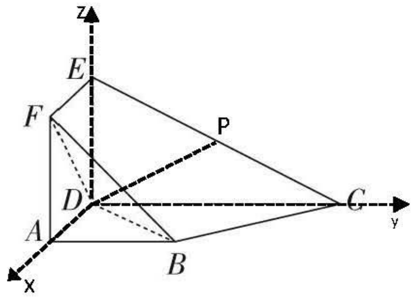
(2)因为平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADEF\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$CD\perp AD$，

$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $CD\perp$ 平面 $ADEF$，又 $DE\subset$ 平面 $ADEF$，

故 $CD\perp ED$.

而四边形 $ADEF$ 是正方形，所以 $AD\perp DE$，




又 $CD\perp AD$，以 $D$ 为原点，$DA$，$DC$，$DE$ 所在直线分别为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴，建立空间直角坐标系 $Dxyz$ ..............5 分

$AD=1$，则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$F(1,0,1)$，$C(0,\ 2,0)$，$E(0,\ 0,1)$，$P(0,\ 1,\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{DP}=(0,1,\frac{1}{2})$ .............6 分

设平面 $BDF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ x+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=z=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,\ -1,\ -1)$. ...........8 分

设直线 $DP$ 与平面 $BDF$ 所成角的大小为 $\alpha$， ..............9 分

则 $\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{DP},\ \boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{DP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DP}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ .............11 分

所以直线 $DP$ 与平面 $BDF$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$ .(设角或答话写一个即可)

(3)取平面 $CDE$ 的一个法向量$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$， ..............12 分

设平面 $BDF$ 与平面 $CDE$ 夹角的大小为$\theta$， ..............13 分

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DA},\ \boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DA}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ..............15 分

所以平面 $BDF$ 与平面 $CDE$ 夹角的余弦值是$\frac{\sqrt{3}}{3}$.(设角或答话写一个即可)

18.（**本小题满分 15 分**）

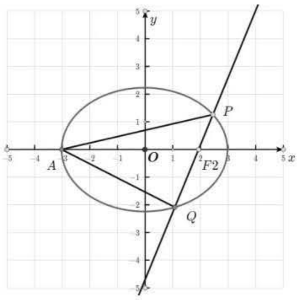
解：(1)由题意可得$a-c=\frac{1}{4}\cdot 2c$

$\therefore 2a=3c$ ……1 分

椭圆的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$ ……2 分

(2)

(i)由(1)可知$a^2=\frac{9}{4}c^2,b^2=\frac{5}{4}c^2$




$\therefore A(-\frac{3}{2}c,0)$

设椭圆方程为$\frac{4x^2}{9c^2}+\frac{4y^2}{5c^2}=1$ ……3 分

法一：

由题意可知直线 $PQ$ 的斜率显然不为 0

设直线 $PQ$ 方程为：$x=my+c,P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases}20x^2+36y^2=45c^2\\ x=my+c\end{cases}$，

消去$x$整理得$(20m^2+36)y^2+40mcy-25c^2=0$ ……4 分

由题意知$\Delta>0$恒成立

则$y_1+y_2=\frac{-10mc}{5m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{-25c^2}{20m^2+36}$ ……5 分

则$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}|AF_2|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}c\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{5}{4}c^2\cdot\frac{15\sqrt{m^2+1}}{5m^2+9}$ ……6 分

令$t=\sqrt{m^2+1}$，则$t\geq 1$

$\therefore S_{\triangle APQ}=\frac{75}{4}c^2\cdot\frac{t}{5t^2+4}=\frac{75}{4}c^2\cdot\frac{1}{5t+\frac{4}{t}}$，因为$y=5t+\frac{4}{t}$在$[1,+\infty)$上单调递增，

当$t=1$时，$S_{\triangle APQ}$有最大值

$(S_{\triangle APQ})_{max}=\frac{75}{4}c^2\cdot\frac{1}{5+4}=\frac{25}{3}$

$\therefore c^2=4$ ……8 分

$\therefore c=2,a=3,b=\sqrt{5}$

椭圆方程为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ ……9 分

法二：当直线 PQ 的斜率存在时，由题知，$k\neq 0$

此时，设 PQ：$y=k(x-c)$

联立$\begin{cases}20x^2+36y^2=45c^2\\ y=k(x-c)\end{cases}$，得$(20+36k^2)x^2-72k^2cx+36k^2c^2-45c^2=0$ ……4 分

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，由题意知 $\Delta>0$ 恒成立

$x_1+x_2=\dfrac{72k^2c}{20+36k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{36k^2c^2-45c^2}{20+36k^2}$ ……5 分

$$S_{\Delta APQ}=\frac{1}{2}\cdot|AF_2|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}c\cdot|kx_1-kx_2|=\frac{5}{4}c\cdot|k|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\frac{5}{4}c\cdot|k|\sqrt{(\frac{72k^2c}{20+36k^2})^2-4\cdot\frac{36k^2c^2-45c^2}{20+36k^2}}=\frac{75}{4}c^2\cdot|k|\cdot\frac{\sqrt{1+k^2}}{5+9k^2}=\frac{75}{4}c^2\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}{\frac{5}{k^2}+9}(k\neq 0)$$

……6 分

令 $t=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}>1$，$\therefore S_{\Delta APQ}=\dfrac{75c^2}{4}\cdot\dfrac{t}{5(t^2-1)+9}=\dfrac{75c^2}{4}\cdot\dfrac{t}{5t^2+4}=\dfrac{75c^2}{4}\cdot\dfrac{1}{5t+\frac{4}{t}}$

因为 $y=5t+\dfrac{4}{t}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore 5t+\dfrac{4}{t}>9(t>1)$，$\therefore S_{\Delta APQ}=\dfrac{75c^2}{4}\cdot\dfrac{1}{5t+\frac{4}{t}}<\dfrac{75c^2}{4}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{25c^2}{12}$ ……7 分

当直线 $PQ$ 的斜率不存在时，此时 $PQ$：$x=c$，代入 $\dfrac{4x^2}{9c^2}+\dfrac{4y^2}{5c^2}=1$ 中，

得 $|PQ|=\dfrac{5c}{3}$，$\therefore S_{\Delta APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot|AF_2|\cdot|PQ|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{2}c\cdot\dfrac{5}{3}c=\dfrac{25}{12}c^2$， ……8 分

所以 $\therefore\Delta APQ$ 面积的最大值为 $\dfrac{25}{12}c^2=\dfrac{25}{3},\therefore c^2=4$

椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ ……9 分

(ii)法一：由（i）知 $A(-3,0)$，$F_2(2,0)$

$\therefore k_{AP}=\frac{y_1}{x_1+3}$，$k_{AQ}=\frac{y_2}{x_2+3}$

$\therefore$ 直线 $AP$ 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+3}\cdot(x+3)$，直线 $AQ$ 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2+3}\cdot(x+3)$

$\therefore M(\frac{3}{4},\frac{15y_1}{4(x_1+3)})$，$N(\frac{3}{4},\frac{15y_2}{4(x_2+3)})$ ……11 分

$\therefore \overrightarrow{F_2M}=(-\frac{5}{4},\frac{15y_1}{4(x_1+3)})$，$\overrightarrow{F_2N}=(-\frac{5}{4},\frac{15y_2}{4(x_2+3)})$ ……12 分

由$c=2$，得$y_1+y_2=\frac{-20m}{5m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{-25}{5m^2+9}$，$x=my+2$

$$\therefore \overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=\frac{25}{16}+\frac{225}{16}\cdot\frac{y_1y_2}{(x_1+3)(x_2+3)}$$

$$=\frac{25}{16}+\frac{225}{16}\cdot\frac{y_1y_2}{(my_1+5)(my_2+5)}$$

$$=\frac{25}{16}+\frac{225}{16}\cdot\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+5m(y_1+y_2)+25}$$

$$=\frac{25}{16}+\frac{225}{16}\cdot\frac{y_1y_2}{m^2\cdot\frac{-25}{5m^2+9}+5m\cdot\frac{-20m}{5m^2+9}+25}$$

$=\frac{25}{16}+\frac{225}{16}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=0$ ……14 分

$\therefore F_2M\perp F_2N$

∴以 $MN$ 为直径的圆恒过右焦点. ……15 分

法二：由（i）知$A(-3,0)$，$F_2(2,0)$

当直线 PQ 的斜率不存在时，有$P(2,\frac{5}{3}),Q(2,-\frac{5}{3})$

直线$AP:y=\frac{1}{3}x+1$，令$x=\frac{3}{4}$，得$M(\frac{3}{4},\frac{5}{4})$，同理$N(\frac{3}{4},-\frac{5}{4})$

此时$\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=\left(-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4},-\frac{5}{4}\right)=0$ ……10 分

当直线 PQ 的斜率存在时，$y=k(x-2)$

$\therefore k_{AP}=\frac{y_1}{x_1+3}$，$k_{AQ}=\frac{y_2}{x_2+3}$

$\therefore$ 直线$AP$的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+3}\cdot(x+3)$，直线$AQ$的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2+3}\cdot(x+3)$

$\therefore M(\frac{3}{4},\frac{15y_1}{4(x_1+3)})$，$N(\frac{3}{4},\frac{15y_2}{4(x_2+3)})$ ……11 分

$\therefore \overrightarrow{F_2M}=(-\frac{5}{4},\frac{15y_1}{4(x_1+3)})$，$\overrightarrow{F_2N}=(-\frac{5}{4},\frac{15y_2}{4(x_2+3)})$ ……12 分

由$c=2$，$x_1+x_2=\dfrac{36k^2}{5+9k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{36k^2-45}{5+9k^2}$

$$\therefore \overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=\frac{25}{16}+\frac{225}{16}\cdot\frac{y_1y_2}{(x_1+3)(x_2+3)}=\frac{25}{16}+\frac{225}{16}\cdot\frac{k^2(x_1-2)(x_2-2)}{(x_1+3)(x_2+3)}$$

$$=\frac{25}{16}+\frac{225}{16}\cdot\frac{k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]}{x_1x_2+3(x_1+x_2)+9}=\frac{25}{16}+\frac{225}{16}\cdot\frac{k^2[\frac{36k^2-45}{5+9k^2}-2\cdot\frac{36k^2}{5+9k^2}+4]}{\frac{36k^2-45}{5+9k^2}+3\cdot\frac{36k^2}{5+9k^2}+9}$$

$$=\frac{25}{16}+\frac{225}{16}\cdot\frac{k^2[36k^2-45-72k^2+20+36k^2]}{36k^2-45+108k^2+45+81k^2}=\frac{25}{16}-\frac{225}{16}\cdot\frac{25k^2}{225k^2}=0$$ ……14 分

$\therefore F_2M\perp F_2N$

∴以 $MN$ 为直径的圆恒过右焦点. ……15 分

19.（**本小题满分 15 分**）

解：(1)设数列$\{a_n\}$首项$a_1=2$公比$q(q>0)$，设数列$\{b_n\}$首项$b_1=1$公差$d$

$\because\begin{cases}a_5=4a_3\\a_2=b_4\end{cases},\begin{cases}a_1q^4=4a_1q^2\\a_1q=b_1+3d\end{cases}$, ……1 分

$\therefore q=2,q=-2(舍),d=1$

$\therefore a_n=2^n,b_n=n$ ……3 分

(2)$T_{4n}=\left(b_1^2-b_2^2-b_3^2+b_4^2\right)+\left(b_5^2-b_6^2-b_7^2+b_8^2\right)+\cdots+\left(b_{4n-3}^2-b_{4n-2}^2-b_{4n-1}^2+b_{4n}^2\right)$

$b_{4n-3}^2-b_{4n-2}^2-b_{4n-1}^2+b_{4n}^2=(4n-3)^2-(4n-2)^2-(4n-1)^2+(4n)^2=4$ ……4 分

$\therefore T_{4n}=4n,\dfrac{T_{4n}\cdot b_{n+2}}{a_{n+2}}=\dfrac{n(n+2)}{2^n}$, ……6 分

集合$\left\{n\middle|\lambda\le\dfrac{n(n+2)}{2^n},n\in N*\right\}$，设$D_n=\dfrac{n(n+2)}{2^n}$

$D_{n+1}-D_n=\dfrac{(n+1)(n+3)}{2^{n+1}}-\dfrac{n(n+2)}{2^n}=\dfrac{-n^2+3}{2^{n+1}}$，所以当 ……7 分

$n=1$时，$D_2>D_1$,当$n\ge2$时，$D_2>D_3>D_4>\cdots$. $D_1=\dfrac{3}{2}$，$D_2=2$，$D_3=\dfrac{15}{8}$，$D_4=\dfrac{3}{2}$，$D_5=\dfrac{35}{32}$,因为

集合有 4 个元素，$\frac{35}{32}<\lambda\le\frac{3}{2}$.  ……8 分

(3) $C_n=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2^{n+2}\cdot\sqrt{n(n+2)}}，n为奇数\\ n\cdot 2^n，n为偶数\end{cases}$，$S_{2n}=C_1+C_2+C_3+\cdots+C_{2n}$

设 $A_n=C_2+C_4+C_6+\cdots+C_{2n}=2\cdot2^2+4\cdot2^4+6\cdot2^6+\cdots+2n\cdot2^{2n}$

$4A_n=2\cdot2^4+4\cdot2^6+\cdots+(2n-2)\cdot2^{2n}+2n\cdot2^{2n+2}$  ……9 分

$-3A_n=8+2\left(2^4+2^6+2^8+\cdots+2^{2n}\right)-2n\cdot2^{2n+2}=8+2\frac{2^4-2^{2n}\cdot4}{1-4}-2n\cdot2^{2n+2}$ …10 分

$=8-\frac{32}{3}+\frac{2\cdot2^{2n+2}}{3}-2n\cdot2^{2n+2}=-\frac{8}{3}+\left(\frac{2}{3}-2n\right)\cdot2^{2n+2}$

所以，$A_n=\frac{8}{9}+\left(\frac{2}{3}n-\frac{2}{9}\right)\cdot2^{2n+2}$  ………11 分

当 $n$ 为奇数时，$C_n=\frac{4\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2^{n+2}\cdot\sqrt{n(n+2)}}<\frac{4\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2^{n+2}\cdot\sqrt{n(n+2)}}=\frac{1}{2^n\cdot\sqrt{n}}-\frac{1}{2^{n+2}\cdot\sqrt{n+2}}$ ……13 分

$B_n=C_1+C_3+C_5+\cdots+C_{2n-1}<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{2^3\cdot\sqrt{3}}-\frac{1}{2^5\cdot\sqrt{5}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{2n-1}\cdot\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{2^{2n+1}\cdot\sqrt{2n+1}}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2n+1}\cdot\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{2}$

……14 分

$S_{2n}=A_n+B_n<\frac{8}{9}+\left(\frac{2}{3}n-\frac{2}{9}\right)\cdot2^{2n+2}+\frac{1}{2}=\frac{25}{18}+\left(\frac{2}{3}n-\frac{2}{9}\right)\cdot4^{n+1}$  ……15 分

20.（本小题满分 16 分）

解：（1） $a=1$时，$f(x)=e^x-xe^x+\ln x$，$f'(x)=-xe^x+\frac{1}{x}$  ……1 分

$\therefore f'(1)=-e+1$，  ……2 分

又 $f(1)=0$  ……3 分

所以切线方程为：$y=(1-e)x-1+e$  ……4 分

（2）(i) 当 $a>e$ 时，$f(x)=a\ln x-(x-1)\mathrm{e}^x$，$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\mathrm{e}^x\cdot x=\dfrac{a-\mathrm{e}^x\cdot x^2}{x}$，……5 分

令 $g(x)=a-\mathrm{e}^x\cdot x^2(x>0)$，$g'(x)=-\mathrm{e}^x(x^2+2x)<0$，……6 分

则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

由 $a>\mathrm{e}$，得 $\ln a>1$，$\ln^2 a>1$，则 $1-\ln^2 a<0$，

又 $g(1)=a-\mathrm{e}>0$，$g(\ln a)=a-\mathrm{e}^{\ln a}\cdot\ln^2 a=a(1-\ln^2 a)<0$，……8 分

由零点存在性定理可知，存在唯一 $x_1\in(1,\ln a)$ 使 $g(x_1)=0$，即 $a-e^{x_1}x_1^2=0$，……9 分

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递增，

当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递减，……10 分

则 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值，即 $f(x)$ 存在唯一的极值点 $x_1$.

(ii) 由 (i) 可知，$a-e^{x_1}x_1^2=0$，即 $\dfrac{a}{x_1^2}=e^{x_1}$，①

由 $x_0>x_1$，且 $x_1\in(1,\ln a)$，得 $x_0>1$，

由 $f(x_0)=0$，得 $a\ln x_0-(x_0-1)e^{x_0}=0$，$\dfrac{a\ln x_0}{x_0-1}=e^{x_0}$，②

②式除以①式，得 $e^{x_0-x_1}=\dfrac{x_1^2\ln x_0}{x_0-1}$，……11 分

先证 $\ln x<x-1,(x>1)$，

令 $\varphi(x)=\ln x-x+1$，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}<0$，$\therefore\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(x)<\varphi(1)=0$，

所以 $x_0>1$ 时，$0<\ln x_0<x_0-1$ 则 $\dfrac{\ln x_0}{x_0-1}<1$，

则 $e^{x_0-x_1}=\dfrac{x_1^2\ln x_0}{x_0-1}<x_1^2$，$x_0-x_1<2\ln x_1$，……12 分

要证明$x_0<\dfrac{5x_1^2+x_1-3}{2x_1+1}$，等价于证明$x_0-x_1<\dfrac{5x_1^2+x_1-3}{2x_1+1}-x_1$，

等价于证明$(x_0-x_1)(2x_1+1)<3(x_1^2-1)$

由$x_0-x_1<2\ln x_1$，且$2x_1+1>0$，有$(x_0-x_1)(2x_1+1)<2\ln x_1\cdot(2x_1+1)$ ……13 分

法一：设$h(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x}),(x>1)$，

$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{2x-x^2-1}{2x^2}=\dfrac{-(x-1)^2}{2x^2}<0$

$\therefore h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$h(x)<h(1)=0$ ……14 分

所以，当$x_1>1$时，有$2\ln x_1<x_1-\dfrac{1}{x_1}$，所以$(x_0-x_1)(2x_1+1)<2\ln x_1\cdot(2x_1+1)<(x_1-\dfrac{1}{x_1})(2x_1+1)$，

……15 分

又$(x_1-\dfrac{1}{x_1})(2x_1+1)-3(x_1^2-1)=-x_1^2+x_1-\dfrac{1}{x_1}+1=-(x_1+1)\dfrac{(x_1-1)^2}{x_1}<0$，

得$(x_1-\dfrac{1}{x_1})(2x_1+1)<3(x_1^2-1)$， ……16 分

故$(x_0-x_1)(2x_1+1)<3(x_1^2-1)$成立．证毕

法二：设$t(x)=2\ln x-3\cdot\dfrac{x^2-1}{2x+1},(x>1)$，则 ……14 分

$t'(x)=\dfrac{2}{x}-3\cdot\dfrac{2x^2+2x+2}{(2x+1)^2}=-2\cdot\dfrac{3x^3-x^2-x-1}{x(2x+1)^2}$

$=-2\cdot\dfrac{(x-1)(3x^2+2x+1)}{x(2x+1)^2}=-2\cdot\dfrac{(x-1)\left[3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}\right]}{x(2x+1)^2}<0$， ……15 分

得$t(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，则$t(x)<t(1)=0$，所以，当$x_1>1$时，得$2\ln x_1<3\cdot\dfrac{x_1^2-1}{2x_1+1}$，则

$(2x_1+1)\cdot 2\ln x_1<3(x_1^2-1)$，故$(x_0-x_1)(2x_1+1)<3(x_1^2-1)$成立.得证 ……16 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。