高三数学试题

一、单选题（本大题共 8 小题）

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}|\ x^2-x-2\le 0\},B=\{x|0\le x\le 5\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $[0,2)$　　D. $[0,2]$

【答案】B

【解析】

【分析】先求 A 集合，再利用交集概念求解即可.

【详解】因为 $A=\{x\in \mathbf{Z}|(x-2)(x+1)\le 0\}=\{-1,0,1,2\},B=\{x|0\le x\le 5\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$.

故选：B.

2. 已知复数 z 和虚数单位 i 满足 $z=\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $\bar{z}=$（　　）

A. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

C. $1-\mathrm{i}$　　D. $2-2\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用复数的除法运算求出 z，再结合共轭复数的概念求 $\bar{z}$.

【详解】$z=\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-\mathrm{i}^2+\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

故选：A

3. 已知向量 $\vec{a}=(1,m),\vec{b}=(1,-1)$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则实数 $m=$（　　）

A. 3　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -3

【答案】A

【解析】

【分析】根据平面向量的坐标表示计算即可.

【详解】由 $\vec{a}=(1,m),\vec{b}=(1,-1)\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=(2,m-1)$.

因为 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，所以 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=1\times 2+(-1)\times(m-1)=0\Rightarrow m=3$.

故选:A.

4. 为了得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只需把函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象（　　）

A. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度　　B. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度

【答案】B

【解析】

【分析】先把目标函数变形为 $y=\sin[2(x+\frac{\pi}{12})]$，再把平移函数变形为 $y=\sin[2(x-\frac{\pi}{6})]$，即可确定平移方向和平移单位.

【详解】因为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 可变形为 $y=\sin[2(x+\frac{\pi}{12})]$，

函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 可变形为 $y=\sin[2(x-\frac{\pi}{6})]$，

故把函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位即可得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，

故选：B.

5. $\left(1-\frac{2x}{y}\right)(x+y)^6$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为（　　）

A. 55　　B. -70　　C. 65　　D. -25

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $(x+y)^6$ 展开式的通项公式进行计算即可.

【详解】含 x^4y^2 的项为 $T=1\times C_6^2x^4y^2-\frac{2x}{y}\times C_6^3x^3y^3=-25x^4y^2$，

所以展开式中 x^4y^2 的系数为 -25.

故选：D.

6. 已知函数 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+4$，若方程 $f(x)=kx+4-k(k>0)$ 有三个不同的根 x_1,x_2,x_3，则 $x_1+x_2+x_3=$（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. k

【答案】B

【解析】

【分析】由题意，易知 $y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ 为奇函数，$f\left(x\right)$ 由函数 $y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ 向右平移一个单位长度，再向上平移 4 个单位长度而得到的，所以 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(1,4\right)$ 对称，再根据直线也关于点 $\left(1,4\right)$ 对称，即可得答案.

【详解】由题意，因为 $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}=-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)$，所以 $y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ 为奇函数，

$f\left(x\right)$ 由函数 $y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ 向右平移一个单位长度，再向上平移 4 个单位长度而得到的，

所以 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(1,4\right)$ 对称.

而 $f\left(x\right)=kx+4-k=k\left(x-1\right)+4$ 所表示的直线也关于点 $\left(1,4\right)$ 对称，

所以方程 $f\left(x\right)=kx+4-k$ 的三个实根 x_1,x_2,x_3 中必有一个为 1，另外两个关于 $x=1$ 对称，所以 $x_1+x_2+x_3=3$.

故选：B.

7. 道韵楼以“古、大、奇、美”著称，内部雕梁画栋，有倒吊莲花、壁画、雕塑等，是历史、文化、民俗一体的观光胜地道韵楼可近似地看成一个正八棱柱，其底面面积约为 $3200(\sqrt{2}+1)$ 平方米，高约为 11.5 米，则该八棱柱的侧面积约是（　）

A. 460 平方米　　B. 1840 平方米　　C. 2760 平方米　　D. 3680 平方米

【答案】D

【解析】

【分析】利用 $ABCDEFGH$ 是正八边形，求得 $\angle AOB=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$，利用余弦定理求得 $OA^2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}AB^2$，利用底面面积求得 $AB=40$，从而求得侧面积.

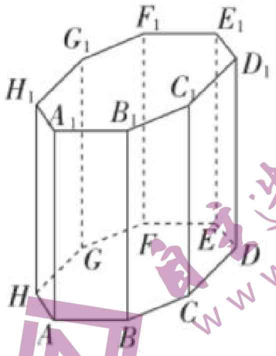
【详解】如图，由题意可知底面 $ABCDEFGH$ 是正八边形，$\angle AOB=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$，由余弦定理可得

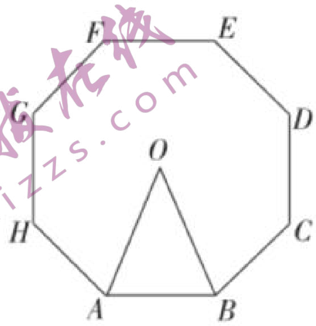
$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB=(2-\sqrt{2})OA^2$，则 $OA^2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}AB^2$.因为底面

$ABCDEFGH$ 的面积为 $3200(\sqrt{2}+1)$ 平方米，所以 $8\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2}AB^2=3200(\sqrt{2}+1)$，解得

$AB=40$.则该八棱柱的侧面积为 $320\times11.5=3680$ 平方米.

故选：D.





8. 设 $a=3^{\pi}$，$b=\pi^{e}$，$c=e^{\pi}$（e 为自然对数底数），则 a，b，c 大小关系为（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

【答案】B

【解析】

【分析】由 $\ln a=\pi\ln3$，$\ln b=e\ln\pi$，$\ln c=\pi$，且 $\ln a>\ln c$，构造 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 利用导数研究单调性

比较 $\frac{\ln\pi}{\pi},\frac{\ln e}{e}$ 大小，即可得结果.

【详解】由题设 $\ln a=\pi\ln3$，$\ln b=e\ln\pi$，$\ln c=\pi$，显然 $\ln a>\ln c$，

对于 $e\ln\pi$，π 的大小，只需比较 $\frac{\ln\pi}{\pi},\frac{\ln e}{e}$ 大小，

令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 且 $x\ge e$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\le0$，即 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上递减，

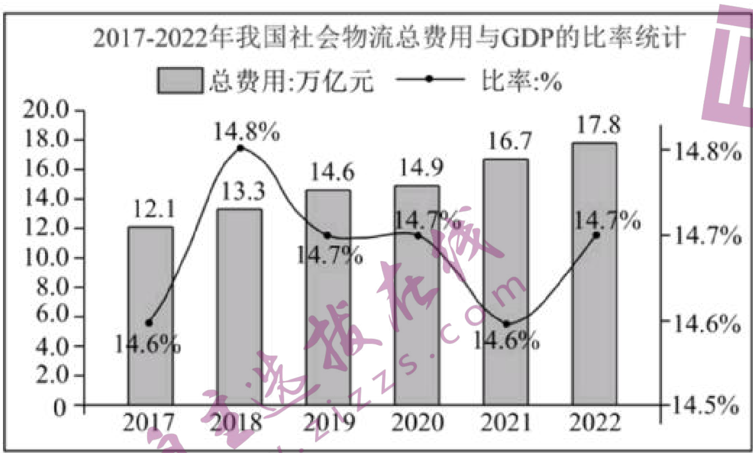
所以 $\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln e}{e}$，故 $\ln b=e\ln\pi<\ln c=\pi$，

综上，$\ln a>\ln c>\ln b$，故 $a>c>b$.

故选：B

二、多项选择题：本题共 4 小题，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9. 随着国民经济的快速发展和人民生活水平的不断提高，我国社会物流需求不断增加，物流行业前景广阔．社会物流总费用与 GDP 的比率是反映地区物流发展水平的指标，下面是 2017～2022 年我国社会物流总费用与 GDP 的比率统计，则（　　）.



A. 2018～2022 这 5 年我国社会物流总费用逐年增长，且 2019 年增长的最多

B. 2017～2022 这 6 年我国社会物流总费用的 70% 分位数为 16.7 万亿元

C. 2017～2022 这 6 年我国社会物流总费用与 GDP 的比率的极差为0.2%

D. 2019 年我国的 GDP 不达 100 万亿元

【答案】BCD

【解析】

【分析】由图表结合统计相关知识逐项判断可得答案.

【详解】由图表可知，2018～2022 这 5 年我国社会物流总费用逐年增长，2021 年增长的最多，且增长为 $16.7-14.9=1.8$ 万亿元，故 A 错误；

因为 $6\times70\%=4.2$，则 70% 分位数为第 5 个，即为 16.7，

所以这 6 年我国社会物流总费用的 70% 分位数为 16.7 万亿元，故 B 正确；

由图表可知，2017～2022 这 6 年我国社会物流总费用与 GDP 的比率的极差为 $14.8\%-14.6\%=0.2\%$，故 C 正确；

由图表可知，2019 年我国的 GDP 为 $14.6\div14.7\%<100$ 万亿元，故 D 正确.

故选：BCD.

10. 设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，满足 $a_n-a_{n-1}=-4$，$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $a_1=14$，则下列选项正确的是（　　）

A. $a_n=-4n+14$

B. 数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$为等差数列

C. 当$n=8$时S_n有最大值

D. 设$b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$，则当$n=2$或$n=4$时数列$\{b_n\}$的前 n 项和取最大值

【答案】BD

【解析】

【分析】根据等差数列的定义求出通项公式判断 A，求出$\dfrac{S_n}{n}=-2n+16$，然后利用等差数列定义判断 B，结合二次函数求等差数列前 n 项和的最大值判断 C，根据b_n的符号判定$\{b_n\}$前 n 项和的最值判断 D.

【详解】对于 A，由$a_n-a_{n-1}=-4$知数列$\{a_n\}$为等差数列，公差为-4，首项为$a_1=14$，

所以该数列的通项公式为$a_n=14-4(n-1)=-4n+18$，错误；

对于 B，因为$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(14+18-4n)}{2}=-2n^2+16n$，所以$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{-2n^2+16n}{n}=-2n+16$，

则当$n\geq 2$时，$\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=-2n+16-(-2n+18)=-2$，故数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，正确；

对于 C，$S_n=-2n^2+16n=-2(n-4)^2+32$，故当$n=4$时，$S_n$有最大值，错误；

对于 D，令$a_n>0$得$1\leq n\leq 4$，令$a_n<0$得$n\geq 5$，

则当$n=1$或 2 时，$b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}>0$，

当$n=3$时，$b_3<0$，当$n=4$时，$b_4>0$，当$n\geq 5$时，$b_n<0$，

又$b_3=a_3a_4a_5=6\times 2\times(-2)=-24$，$b_4=a_4a_5a_6=2\times(-2)\times(-6)=24$，

所以$n=2$或$n=4$时，数列$\{b_n\}$的前 n 项和取最大值，正确.

故选：BD

11. 已知点$P\left(\dfrac{3\pi}{8},1\right)$是函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$的图象的一个对称中心，则（　　）

A. $f\left(x-\dfrac{3\pi}{8}\right)-1$是奇函数

B. $\omega=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{3}k$，$k\in\mathbf{N}^*$

C. 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{3\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right)$ 上有且仅有 2 条对称轴，则 $\omega=2$

D. 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5}\right)$ 上单调递减，则 $\omega=2$ 或 $\omega=\frac{14}{3}$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据 $f(x)$ 的对称中心求得 b,ω，根据奇偶性、对称性、单调性等知识确定正确答案.

【详解】依题意，点 $P\left(\frac{3\pi}{8},1\right)$ 是函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的图象的一个对称中心，

所以 $b=1$，且 $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}\right)=0,\frac{3\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi,\omega=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k,k\in\mathbf{N}^*$ ①，B 选项正确.

则 $f(x)=\sin\left[\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)x+\frac{\pi}{4}\right]+1,k\in\mathbf{N}^*$，

所以 $f\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)-1=\sin\left[\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$

$=\sin\left[\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)x+\frac{\pi}{2}(1-2k)\right]$，

由于 $1-2k$ 是奇数，所以 $f\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)-1=\sin\left[\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)x+\frac{\pi}{2}(1-2k)\right]$ 是偶函数，

A 选项错误.

C 选项，$\frac{3\pi}{8}<x<\frac{11\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\frac{11\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}$，

将 $\omega=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k,k\in\mathbf{N}^*$ 代入得：

$\frac{3\pi}{8}\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)+\frac{\pi}{4}<\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)x+\frac{\pi}{4}<\frac{11\pi}{8}\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)+\frac{\pi}{4}$，

整理得 $k\pi<\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)x+\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{8k\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}$，

由于 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{3\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right)$ 上有且仅有 2 条对称轴，

所以 $\frac{3\pi}{2}<\frac{8k\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\le\frac{5\pi}{2}$，解得 $\frac{13}{16}<k\le\frac{19}{16}$，由于 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=1$，

对应$\omega=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=2$，所以C选项正确.

D选项，$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5}\right)$上单调递减，

$\frac{\pi}{5}<x<\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{5}\omega<\omega x<\frac{2\pi}{5}\omega,\frac{\pi}{5}\omega+\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{5}\omega+\frac{\pi}{4}$，

将$\omega=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k,k\in\mathbf{N}^*$代入得：

$\frac{\pi}{5}\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)+\frac{\pi}{4}<\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)x+\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{5}\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)+\frac{\pi}{4}$，

整理得$\frac{8\pi}{15}k+\frac{7\pi}{60}<\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\right)x+\frac{\pi}{4}<\frac{16\pi}{15}k-\frac{\pi}{60}$，

则$\frac{16\pi}{15}k-\frac{\pi}{60}-\left(\frac{8\pi}{15}k+\frac{7\pi}{60}\right)\le\pi$，解得$1\le k\le\frac{17}{8}$，而$k\in\mathbf{N}^*$，所以$k=1$或$k=2$，

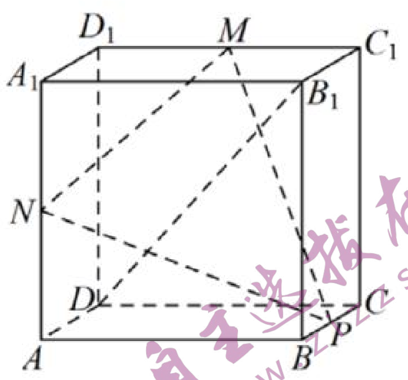
$k=1$时，$\left(\frac{8\pi}{15}k+\frac{7\pi}{60},\frac{16\pi}{15}k-\frac{\pi}{60}\right)=\left(\frac{37\pi}{60},\frac{21\pi}{20}\right)$，符合单调性，

$k=2$时，$\left(\frac{8\pi}{15}k+\frac{7\pi}{60},\frac{16\pi}{15}k-\frac{\pi}{60}\right)=\left(\frac{71\pi}{60},\frac{127\pi}{60}\right)$，不符合单调性，所以$k=2$舍去

所以$\omega=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\times1=2$，所以D选项错误.

故选：BC

12. 如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知M，N，P分别是棱C_1D_1，AA_1，BC的中点，Q为平面PMN上的动点，且直线QB_1与直线DB_1的夹角为$30°$，则（　）



A. $DB_1\perp$平面PMN

B. 平面PMN截正方体所得的截面面积为$3\sqrt{3}$

C. 点 Q 的轨迹长度为 π

D. 能放入由平面 PMN 分割该正方体所成的两个空间几何体内部（厚度忽略不计）的球的半径的最大值为 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 选项，建立空间直角坐标系，求出平面 PMN 的法向量，得到线面垂直；B 选项，作出辅助线，找到平面 PMN 截正方体所得的截面，求出面积；C 选项，作出辅助线，得到点 Q 的轨迹，并求出轨迹长度；D 选项，由对称性得到平面 PMN 分割该正方体所成的两个空间几何体对称，由对称性可知，球心在 B_1D 上，设球心为 $R(t,t,t)$，由 $\left|\overrightarrow{RS}\right|=t$ 得到方程，求出半径的最大值.

【详解】A 选项，以 D 为坐标原点，DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，

$P(1,2,0),M(0,1,2),N(2,0,1),D(0,0,0),B_1(2,2,2)$，

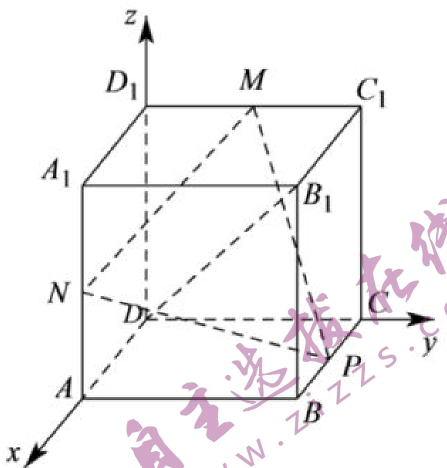
故 $\overrightarrow{DB_1}=(2,2,2),\overrightarrow{PM}=(-1,-1,2),\overrightarrow{PN}=(1,-2,1)$.

设平面 PMN 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PM}=(x,y,z)\cdot(-1,-1,2)=-x-y+2z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PN}=(x,y,z)\cdot(1,-2,1)=x-2y+z=0\end{cases}$，

令 $z=1$ 得，$x=y=1$，故 $\vec{m}=(1,1,1)$，

因为 $\overrightarrow{DB_1}=2\vec{m}$，故 $DB_1\perp$ 平面 PMN，A 正确；



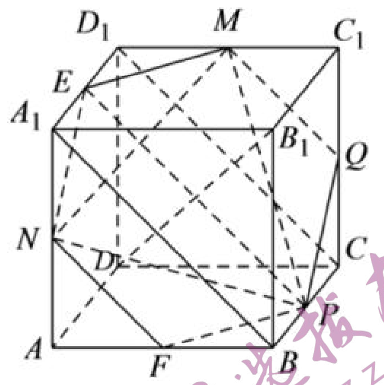
B 选项，取 A_1D_1,AB,CC_1 的中点 E,F,Q，连接 $MQ,ME,EN,NF,FP,PQ,EP,A_1B,CD_1$，

因为 M，N，P 分别是棱 C_1D_1，AA_1，BC 的中点，

所以 $NF//A_1B, MQ//CD_1$，又 $CD_1//EP//A_1B$，

所以 $NF//MQ//EP$，所以平面 PMN 截正方体所得的截面为正六边形 $FPQMEN$，

其中边长为 $\sqrt{2}$，故面积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2=3\sqrt{3}$，B 正确；



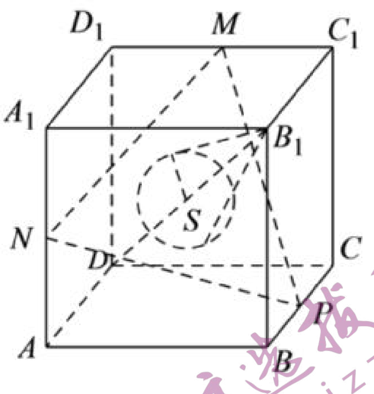
C 选项，Q 为平面 PMN 上的动点，直线 QB_1 与直线 DB_1 的夹角为 $30°$，

又 $DB_1\perp$ 平面 PMN，设垂足为 S，以 S 为圆心，$r=\frac{\sqrt{3}}{3}B_1S$ 为半径作圆，

即为点 Q 的轨迹，

其中 $B_1D=\left|\overrightarrow{B_1D}\right|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$，由对称性可知，$B_1S=\frac{1}{2}B_1D=\sqrt{3}$，

故半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=1$，



故点 Q 的轨迹长度为 2π，C 错误；

D 选项，因为 M，N，P 分别是棱 C_1D_1，AA_1，BC 的中点，

所以平面 PMN 分割该正方体所成的两个空间几何体对称，

不妨求能放入含有顶点 D 的空间几何体的球的半径最大值，

该球与平面 PMN 切与点 S，与平面 ADD_1A_1，平面 $ADCB$，平面 DCC_1D_1 相切，

由对称性可知，球心在 B_1D 上，设球心为 $R(t,t,t)$，则半径为 t，

$S(1,1,1)$，故 $\left|\overrightarrow{RS}\right|=t$，即 $\sqrt{3}(1-t)=t$，解得 $t=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，

故球的半径的最大值为 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，D 正确.

故选：ABD

【点睛】立体几何中截面的处理思路：

（1）直接连接法：有两点在几何体的同一个平面上，连接该两点即为几何体与截面的交线，找截面就是找交线的过程；

（2）作平行线法：过直线与直线外一点作截面，若直线所在的平面与点所在的平面平行，可以通过过点找直线的平行线找到几何体与截面的交线；

（3）作延长线找交点法：若直线相交但在立体几何中未体现，可通过作延长线的方法先找到交点，然后借助交点找到截面形成的交线；

（4）辅助平面法：若三个点两两都不在一个侧面或者底面中，则在作截面时需要作一个辅助平面.

三、填空题

13. 已知点 P 是曲线 $y=\ln x$ 上的一点，则点 P 到直线 $x-y=0$ 的最小距离为________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】设 $y=x+m(m\neq 0)$ 与 $y=\ln x$ 相切与点 $Q(x_0,\ln x_0)$，求得切线方程，再利用两直线间的距离求解.

【详解】由题意可知：$y'=\dfrac{1}{x}$，

设 $y=x+m(m\neq 0)$ 与 $y=\ln x$ 相切与点 $Q(x_0,\ln x_0)$，

则 $y'=\dfrac{1}{x_0}$，令 $y'=\dfrac{1}{x_0}=1$，得 $x_0=1$，则切点 $Q(1,0)$，

代入 $y=x+m(m\neq 0)$，得 $m=-1$，即直线方程为 $x-y-1=0$，

所以与直线 $x-y=0$ 间的距离为 $d=\dfrac{|0+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

即为 P 到直线 $x-y=0$ 的最小距离，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=(a-2)n^2+n+a$，$n\in\mathbf{N}^*$. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为

__________.

【答案】$a_n=-4n+3$

【解析】

【分析】利用等差数列的定义以及 S_n,a_n 的关系即可得出结论.

【详解】由 $S_n=(a-2)n^2+n+a$ 知，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a-1$；

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2(a-2)n+(3-a)$，

此时，当 $n=2$ 时，$a_2=4(a-2)+(3-a)=3a-5$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_{n+1}-a_n=2(a-2)$，而 $a_2-a_1=3a-5-(2a-1)=a-4$，

若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $2(a-2)=a-4$，

所以 $a=0$，则 $a_n=-4n+3$.

故答案为：$a_n=-4n+3$.

15. 某工厂生产一批零件（单位：cm），其尺寸 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(X\leq 20)=0.2$，$P(X<26)=0.8$，则 $\mu=$__________.

【答案】23

【解析】

【分析】求得 $P(X\geq 26)=P(X\leq 20)$，再利用正态密度曲线的对称性可求得 μ 的值.

【详解】因为 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(X\leq 20)=0.2$，$P(X<26)=0.8$，

则 $P(X\geq 26)=1-P(X<26)=1-0.8=0.2=P(X\leq 20)$，

所以，$\mu=\dfrac{20+26}{2}=23$.

故答案为：23.

16. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过$F$的直线$l$交椭圆于$A$，$B$两点，且$|AF|=3|FB|$，则直线$l$的斜率为________.

【答案】$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】由A，F，B三点共线可得$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，再将$A$，$B$两点代入椭圆得到对应关系式，最后消去$b$求出$x_1$，进而得到直线的斜率.

【详解】设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为$|AF|=3|FB|$，

又A，F，B三点共线，所以$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，

所以$(-c-x_1,-y_1)=3(x_2+c,y_2)$，所以$x_1+3x_2=-4c$，$y_1+3y_2=0$.

又$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$在椭圆上，

所以$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，所以$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{9x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}-\dfrac{9y_2^2}{b^2}=-8$，

即$\dfrac{(x_1+3x_2)(x_1-3x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1+3y_2)(y_1-3y_2)}{b^2}=-8$，

所以$\dfrac{-4c(x_1-3x_2)}{a^2}=-8$，所以$x_1-3x_2=\dfrac{2a^2}{c}$，

所以$x_1=\dfrac{a^2}{c}-2c$，又$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以$a^2=3c^2$，所以$x_1=c$，

由$\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，解得$y_1=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c$，

当$y_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c$时，直线$l$的斜率$k=\dfrac{y_1}{x_1+c}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

当 $y_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3}c$ 时，直线 l 的斜率 $k=\frac{y_1}{x_1+c}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线 l 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题

17. 已知□ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $c\cos A-a\cos B+c=0$.

（1）求 $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A$ 的值；

（2）若 $a=5$，求□ABC 面积的最大值.

【答案】（1）0　　（2）$\frac{25}{4}$.

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理以及两角和的正弦公式可得 $\cos A=0$，即可得 $A=\frac{\pi}{2}$，利用诱导公式计算可得 $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=0$；

（2）利用不等式可得 $S_{\square ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\le\frac{b^2+c^2}{4}$，再由勾股定理即可求得□$ABC$ 面积的最大值为 $\frac{25}{4}$.

【小问 1 详解】

因为 $c\cos A-a\cos B+c=0$，

由正弦定理可得 $\sin C\cos A-\sin A\cos B+\sin C=0$.

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以 $\sin C\cos A+\cos A\sin B=\cos A(\sin B+\sin C)=0$.

又因为 $\sin B+\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=0$.

又 $A\in(0,\pi)$，可得 $A=\frac{\pi}{2}$，

故 $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin^2B+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-B\right)-1=\sin^2B+\cos^2B-1=0$.

【小问 2 详解】

因为 $A=\frac{\pi}{2}$，所以 $S_{\square ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\le\frac{b^2+c^2}{4}$，

当且仅当 $b=c$ 时，等号成立.

又可知 $b^2+c^2=a^2=25$，

所以□ABC 面积的最大值为 $\frac{25}{4}$.

18. 近年来，国家鼓励德智体美劳全面发展，舞蹈课是学生们热爱的课程之一，某高中随机调研了本校2023年参加高考的90位考生是否喜欢跳舞的情况，经统计，跳舞与性别情况如下表：（单位：人）

	喜欢跳舞	不喜欢跳舞
女性	25	35
男性	5	25

（1）根据表中数据并依据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，分析喜欢跳舞与性别是否有关联？

（2）用样本估计总体，用本次调研中样本的频率代替概率，从2023年本市考生中随机抽取3人，设被抽取的3人中喜欢跳舞的人数为X，求X的分布列及数学期望$E\left(X\right)$.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
x_α	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

【答案】（1）认为喜欢跳舞与性别有关联

（2）分布列见解析，1

【解析】

【分析】（1）计算出χ^2的值，对照卡方表完成检验；

（2）分别计算出样本中喜欢跳舞和不喜欢跳舞的概率，根据二项分布即可求出随机变量的分布列和数学期望.

【小问1详解】

零假设：H_0：喜欢跳舞与性别无关联，

由题意，$\chi^2=\dfrac{90(25\times25-35\times5)^2}{60\times30\times30\times60}=5.625>3.841$，

依据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，可推断H_0不成立，即认为喜欢跳舞与性别有关联.

【小问2详解】

由题知，考生喜欢跳舞的概率$P=\dfrac{30}{90}=\dfrac{1}{3}$，不喜欢跳舞的概率为$\dfrac{2}{3}$

X的可能取值为0，1，2，3

$$P(X=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}，\ P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}，$$

$$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}，\ P(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

所以X的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

由$X\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，数学期望$E(X)=3\times\frac{1}{3}=1$.

19. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2n+1$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\frac{2a_n}{2na_n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【答案】（1）$a_n=\frac{1}{n^2}$

（2）$T_n=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

【解析】

【分析】（1）累加法计算通项公式即可；

（2）利用裂项相消法计算即可.

【小问1详解】

因为$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2n+1$，

所以$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=2\times1+1=3$，$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=2\times2+1=5$，…，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2n-1$，

累加得$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{(n-1)(3+2n-1)}{2}=n^2-1$，

因为$a_1=1$，所以$\frac{1}{a_n}=n^2$，故$a_n=\frac{1}{n^2}$；

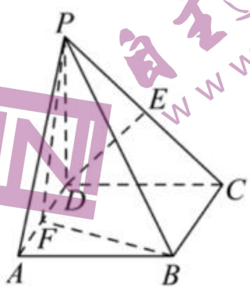
【小问 2 详解】

$$b_n=\frac{2a_n}{2na_n+1}=\frac{2\times\frac{1}{n^2}}{2n\times\frac{1}{n^2}+1}=\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2},$$

$$T_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}.$$

20. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，$PD\perp$底面$ABCD, E, F$分别是PC, AD中点．



（1）求证：$DE\,//$平面PFB；

（2）若PB与平面$ABCD$所成角为45°，求平面PFB与平面EDB夹角的余弦值．

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{7\sqrt{55}}{55}$

【解析】

【分析】（1）设G为PB中点，连接GE, FG，证明$DE\,//\,FG$即可；

（2）利用向量法求出两个平面的法向量，再利用平面与平面的夹角公式计算即可．

【小问 1 详解】

设G为PB中点，连接GE, FG，

又E, F分别是PC, AD中点，

所以$FD=\frac{1}{2}AD, GE=\frac{1}{2}BC$，$GE\,//\,BC$，

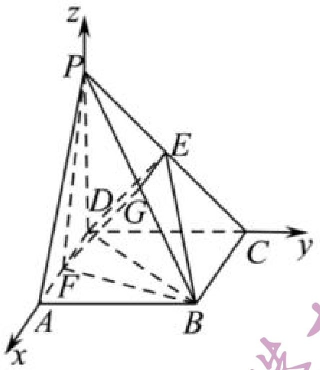
又底面$ABCD$是正方形，

所以 $FD=GE$，$GE//FD$，故四边形 $FDEG$ 为平行四边形，则 $DE//FG$，

由 $DE\not\subset$ 平面 $PFB, FG\subset$ 平面 PFB，则 $DE//$ 平面 PFB.

【小问 2 详解】

由题意知 $\angle PBD=45^\circ$，以 D 为原点，构建空间直角坐标系，



令 $AB=1$，则 $PD=DB=\sqrt{2}$，

所以 $B(1,1,0),D(0,0,0),E\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),F\left(\frac{1}{2},0,0\right),P\left(0,0,\sqrt{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0),\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\overrightarrow{PB}=\left(1,1,-\sqrt{2}\right),\overrightarrow{FB}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，

令 $\vec{m}=(x,y,z)$ 为平面 EDB 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=x+y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\end{cases}$，

令 $y=\sqrt{2}$，即 $\vec{m}=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},-1\right)$，

令 $\vec{n}=(a,b,c)$ 为平面 PFB 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=a+b-\sqrt{2}c=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}a+b=0\end{cases}$，

令 $a=2$，即 $\vec{n}=\left(2,-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

所以 $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{\frac{7}{\sqrt{2}}}{\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{11}{2}}}=\frac{7\sqrt{55}}{55}$，

即平面 PFB 与平面 EDB 夹角的余弦值 $\frac{7\sqrt{55}}{55}$.

21. 已知 $F_1\left(\sqrt{7},0\right),F_2\left(-\sqrt{7},0\right)$，$M$ 为平面上一动点，且满足 $|MF_2|-|MF_1|=4$，记动点 M 的轨迹为曲线 E.

（1）求曲线 E 的方程；

（2）若 $A(-2,0),B(2,0)$，过点 $(1,0)$ 的动直线 l 交曲线 E 于 P，Q（不同于 A，B）两点，直线 AP 与直线 BQ 的斜率分别记为 k_{AP}，k_{BQ}，求证：$\dfrac{k_{AP}}{k_{BQ}}$ 为定值，并求出定值.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1\left(x\geq 2\right)$

（2）证明见解析；$\dfrac{1}{3}$

【解析】

【分析】（1）利用圆锥曲线的定义即可得曲线方程，但要注意只有双曲线右支；

（2）设直线方程，联立方程组，根据韦达定理进行运算可证 $\dfrac{k_{AP}}{k_{BQ}}$ 为定值，之后求出定值即可.

【小问 1 详解】

由题可知 $|MF_2|-|MF_1|=4<2\sqrt{7}$，则 M 的轨迹是实轴长为 $2a=4$，

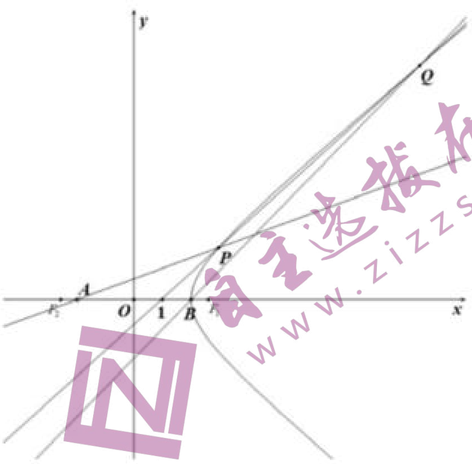
焦点为 $F_1\left(\sqrt{7},0\right),F_2\left(-\sqrt{7},0\right)$ 即 $c=\sqrt{7}$ 的双曲线的右支，则 $b=\sqrt{3}$，

所以曲线 E 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1(x\geq 2)$（或 $x>0$）.

【小问 2 详解】

由题可知过点 $(1,0)$ 的动直线 l 斜率存在且不为 0，则设斜率为 k，

所以直线 l 的方程为：$y=k(x-1)(k\neq 0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，



联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$，可得$(4k^2-3)x^2-8k^2x+4k^2+12=0$，

则$\begin{cases}4k^2-3\neq 0\\ \Delta>0\\ x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2-3}>0\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4k^2+12}{4k^2-3}>0\end{cases}$，可得$\dfrac{3}{4}<k^2<1$，即$-1<k<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<k<1$，

则$\dfrac{k_{AP}}{k_{BQ}}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\times\dfrac{x_2-2}{y_2}=\dfrac{k(x_1-1)(x_2-2)}{(x_1+2)\cdot k(x_2-1)}=\dfrac{(x_1-1)(x_2-2)}{(x_1+2)(x_2-1)}$

$=\dfrac{x_1x_2-2x_1-x_2+2}{x_1x_2-x_1+2x_2-2}=\dfrac{\dfrac{4k^2+12}{4k^2-3}-2x_1-(\dfrac{8k^2}{4k^2-3}-x_1)+2}{\dfrac{4k^2+12}{4k^2-3}-x_1+2(\dfrac{8k^2}{4k^2-3}-x_1)-2}$

$=\dfrac{-x_1+\dfrac{4k^2+6}{4k^2-3}}{-3x_1+\dfrac{12k^2+18}{4k^2-3}}=\dfrac{-x_1+\dfrac{4k^2+6}{4k^2-3}}{3(-x_1+\dfrac{4k^2+6}{4k^2-3})}=\dfrac{1}{3}$，

所以$\dfrac{k_{AP}}{k_{BQ}}$为定值，定值为$\dfrac{1}{3}$.

22. 已知函数$f(x)=\ln(mx)-x(m>0)$.

（1）若$f(x)\le 0$恒成立，求m的取值范围；

（2）若$f(x)$有两个不同的零点x_1,x_2，且$x_2>2x_1$，求实数m的取值范围.

【答案】（1）$(0,\mathrm{e}]$

（2）$\left(\dfrac{2}{\ln 2},+\infty\right)$

【解析】

【分析】（1）由$f(x)\le 0$分离变量得$m\le\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，通过构造函数$g(x)=\dfrac{e^x}{x}(x>0)$，结合导数求得$m$的取值范围；

（2）由$\ln(mx_1)=x_1,\ln(mx_2)=x_2$，两式相减得$\ln\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)=x_2-x_1$，利用换元法表示$x_1,x_2$，通过构造函

数法，利用导数证得$0<x_1<\ln 2<1$，结合（1）求得m的取值范围.

【小问 1 详解】

$f(x)$的定义域为$\{x|x>0\}$，令$f(x)\le 0$，得$m\le\dfrac{e^x}{x}$，

令$g(x)=\dfrac{e^x}{x}(x>0)$，则$g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，

令$g'(x)=0$，可得$x=1$，

当$x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$.

所以$g(x)$在区间$(0,1)$上单调递减，在区间$(1,+\infty)$上单调递增.

所以$g(x)_{\min}=g(1)=e$，

所以$m\in(0,e]$.

【小问 2 详解】

$\ln(mx_1)=x_1,\ln(mx_2)=x_2$，两式相减，得$\ln\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)=x_2-x_1$.

令$t=\dfrac{x_2}{x_1}>2$，则$\ln t=(t-1)x_1$，故$x_1=\dfrac{\ln t}{t-1},x_2=\dfrac{t\ln t}{t-1}$，

记$h(t)=\dfrac{\ln t}{t-1},t>2$，则$h'(t)=\dfrac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}$，

构造函数$H(t)=1-\dfrac{1}{t}-\ln t(t\ge 2)$，$H'(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{1-t}{t^2}$，

所以$H(t)$在$[2,+\infty)$上$H'(t)<0,H(t)$递减，

由于$H(2)=1-\dfrac{1}{2}-\ln 2=\dfrac{1}{2}-\ln 2<\dfrac{1}{2}-\ln\sqrt{e}=0$，

所以当$t>2$时，$H(t)<0$，所以$h'(t)=\dfrac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}<0$，

所以函数$h(t)$在区间$(2,+\infty)$上单调递减，

故$x_1=h(t)<h(2)=\ln 2$，

即 $0<x_1<\ln 2<1$，而 $m=g(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，

故 $m=g\left(x_1\right)>g(\ln 2)=\dfrac{2}{\ln 2}$，即 $m\in\left(\dfrac{2}{\ln 2},+\infty\right)$.

【点睛】方法点睛：利用导数研究函数零点或方程的根，通常有三种思路：

（1）用最值或极值研究；（2）用数形结合思想研究；（3）构造辅助函数研究.