2024 届名校名师测评卷(四)·数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	D	B	C	C	B	A	C	ABD	ACD	CD	ABC

一、单选题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1.【答案】D

【解析】$B=\left\{x\in\mathbf{N}^*\mid\frac{x+1}{x-5}\leqslant 0\right\}=\{1,2,3,4\}$,$\therefore A\cap B=\{2,3\}$,故选 D.

2.【答案】D

【解析】若 $a_1<0$,$q>1$,则数列$\{a_n\}$单调递减;若$\{a_n\}$单调递增,则 $a_1>0$,$q>1$ 或 $a_1<0$,$0<q<1$,则“$q>1$”是“数列$\{a_n\}$单调递增”的既不充分也不必要条件,故选 D.

3.【答案】B

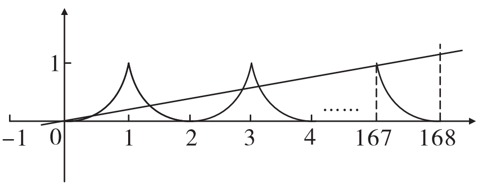
【解析】点 $P(-\sin\alpha,\cos\alpha)$,由诱导公式可化为 $P\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$,由三角函数的定义知 $\theta=\frac{\pi}{2}+\alpha+2k\pi$,又因为 $0<\theta<2\pi$,所以 $\theta=\frac{\pi}{2}+\alpha$,故选 B.

4.【答案】C

【解析】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|AB|^2=2$,$\therefore|AB|=2$,$\therefore$弦心距 $d=2\sqrt{2}$,$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=2\sqrt{2}$,故选 C.

5.【答案】C

【解析】由 $f(3-x)=f(-1+x)$知,$f(x)$关于 $x=1$ 对称,又 $f(x)$为偶函数,所以 2 是 $f(x)$的一个周期,方程 $168\cdot f(x)-x=0$ 的解的个数,即为 $y=f(x)$与 $y=\frac{x}{168}$的交点个数,所以作出 $y=f(x)$的图象以及 $y=\frac{x}{168}$的图象,得出交点个数为 $2+83\times2+1=169$ 个,故选 C.



6.【答案】B

【解析】$a_8=1\Rightarrow a_7=2\Rightarrow a_6=4$,

①若 $a_5=8$,则 $a_4=16\Rightarrow\frac{a_3}{2}=16$ 或 $3a_3+1=16$,

$\therefore a_3=32$ 或 $a_3=5$,

1)若 $a_3=32$ 则 $a_2=64$,$\therefore a_1=128$ 或 21,

2)若 $a_3=5$,则 $a_2=10$,$\therefore a_1=20$ 或 3;

②若 $a_5=1$,则 $a_4=2$,$a_3=4$,则 $a_2=1$ 或 8,

$\therefore a_1=2$ 或 16,

综上：$m=2,3,16,20,21,128$.

故选 B.

7.【答案】A

【解析】因为 $2S=a^2-(b-c)^2$，所以可得 $2\times\frac{1}{2}bc\sin A=b^2+c^2-2bc\cos A-(b^2+c^2-2bc)$，

化简得 $\sin A+2\cos A=2$，又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin^2A+\cos^2A=1$，联立得 $5\sin^2A-4\sin A=0$，

解得 $\sin A=\frac{4}{5}$ 或 $\sin A=0$（舍去），

所以 $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin C}=\frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin C}=\frac{4}{5\tan C}+\frac{3}{5}$，

为△ABC 为锐角三角形，所以 $0<C<\frac{\pi}{2}$，$B=\pi-A-C<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{2}-A<C<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\tan C>\tan\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\frac{1}{\tan A}=\frac{3}{4}$，所以 $\frac{1}{\tan C}\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$，所以 $\frac{4}{5\tan C}\in\left(0,\frac{16}{15}\right)$，

$\therefore\frac{4}{5\tan C}+\frac{3}{5}\in\left(\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right)$.

故选 A.

8.【答案】C

【解析】设容器的高为 x，则容器底面正三角形的边长为 $a-2\sqrt{3}x$，

$\therefore V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot x\cdot(a-2\sqrt{3}x)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(12x^3-4\sqrt{3}ax^2+a^2x)\left(0<x<\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$，

$\because V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(36x^2-8\sqrt{3}ax+a^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3}x-a)(6\sqrt{3}x-a)$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{18}a\right)$ 时，$V'(x)>0$，$V(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(\frac{\sqrt{3}}{18}a,\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$ 时，$V'(x)<0$，$V(x)$ 单调递减，

$\therefore$ 当 $x=\frac{\sqrt{3}}{18}a$ 时，$V_{\max}=\frac{a^3}{54}$.

故选 C.

二、多选题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

9.【答案】ABD

【解析】对于 A. 因 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，且 A、$B\in(0,\pi)$，故 A 正确；

对于 B. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 以及三角形中大边对大角，所以若 $A>B$，则 $a>b$，则 $\sin A>\sin B$，故 B 正确；

对于 C. $\sin 2A=\sin 2B$，且 A、B 为三角形内角，所以 $2A=2B$ 或者 $2A+2B=\pi$，所以△ABC 为等腰三角形或者直角三角形，故 C 错误；

对于 D. $\cos 2A=\cos 2B$，则 $2A=2B$，即 $A=B$，所以△ABC 为等腰三角形，故 D 正确.

故选 ABD.

10.【答案】ACD

【解析】$d>0$，$a_{n+1}-a_n=d>0$，所以 $\{a_n\}$ 是递增数列，故 A 正确；

$na_n=n[a_1+(n-1)d]=dn^2+(a_1-d)n$，当 $n<\frac{d-a_1}{2d}$ 时，数列 $\{na_n\}$ 不是递增数列，故 B 不正确；

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，因为 $d>0$，且 n 为正整数，所以 S_n 必有最小值，故 C 正确；

$\frac{S_n}{n}=\frac{na_1+\frac{n(n-1)}{2}d}{n}=\frac{d}{2}n+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)$，所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，故 D 正确.

故选 ACD.

11.【答案】CD

【解析】A. 当直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面为正方形时，其在各顶点处的离散曲率都相等，当直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面不为正方形时，其在同一底面且相邻的两个顶点处的离散曲率不相等，故 A 错误；

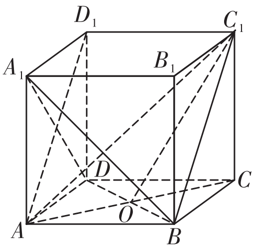
B. 若 $AC=BD$，则菱形 $ABCD$ 为正方形，

因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，AB，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AD$，

所以直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在顶点 A 处的离散曲率为 $1-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}$，故 B 错误；

C. 在四面体 A_1ABD 中 $AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AD$，$AA_1=AB=AD$，所以 $\angle AA_1B=\angle AA_1D=\frac{\pi}{4}$，

所以四面体 A_1ABD 在点 A_1 处的离散曲率为 $1-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\angle BA_1D\right)=\frac{7}{12}$，解得 $\angle BA_1D=\frac{\pi}{3}$，



易知 $A_1B=A_1D=\sqrt{2}AB$，所以 $BD=\sqrt{2}AB$，所以 $AB\perp AD$，

所以直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

因为 $C_1D_1\perp$ 平面 ADD_1A_1，$A_1D\subset$ 平面 ADD_1A_1，

所以 $C_1D_1\perp A_1D$，又 $AD_1\perp A_1D$，$AD_1\cap C_1D_1=D_1$，AD_1，$C_1D_1\subset$ 平面 AC_1D_1，

所以 $A_1D\perp$ 平面 AC_1D_1，又 $AC_1\subset$ 平面 AC_1D_1，所以 $AC_1\perp A_1D$，同理 $BD\perp AC_1$，

又 $A_1D\cap BD=D$，A_1D，$BD\subset$ 平面 A_1BD，所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD，故 C 正确；

D. 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在顶点 A 处的离散曲率为 $1-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\angle DAB\right)=\frac{1}{3}$，

则 $\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，即 $\triangle DAB$ 是等边三角形，

设 $AC\cap BD=O$，则 $\angle BC_1O$ 即为 BC_1 与平面 ACC_1 所成的角，$\sin\angle BC_1O=\frac{\frac{1}{2}AB}{\sqrt{2}AB}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故 D 正确；

故选 CD.

12.【答案】ABC

【解析】对于 A，$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$，所以 A 正确；

对于 B，要使 $y=f(x)$ 有且仅有 3 个零点，

只需 $\begin{cases}f(0)<0\\f(2)>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b<0\\8a-12a+b>0\end{cases}$，所以 $4a<b<0$，故 B 正确；

对于 C，当 $b=2a$ 时，$f(x)=ax^3-3ax^2+2a$，

$f(2-x)=a(2-x)^3-3a(2-x)^2+2a=-ax^3+3ax^2-2a$，

$f(x)+f(2-x)=0$，所以点$(1,0)$是曲线 $y=f(x)$的对称中心，所以 C 正确；

对于 D，$f'(x)=3ax^2-6ax$，设切点为 $C(x_0, ax_0^3-3ax_0^2+b)$，

所以在 C 点处的切线方程为：$y-(ax_0^3-3ax_0^2+b)=(3ax_0^2-6ax_0)(x-x_0)$，

又因为切线过点 $A(2,a)$，所以 $a-(ax_0^3-3ax_0^2+b)=(3ax_0^2-6ax_0)(2-x_0)$，

解得：$2ax_0^3-9ax_0^2+12ax_0+a=b$，令 $g(x)=2ax^3-9ax^2+12ax+a$，$y=b$，

所以过点 A 可以作曲线 $y=f(x)$的切线条数转化为 $y=g(x)$与 $y=b$ 图象的交点个数，

$g'(x)=6ax^2-18ax+12a=6a(x^2-3x+2)=6a(x-1)(x-2)$，

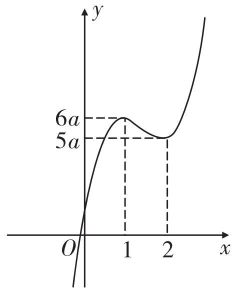
令 $g'(x)=0$，解得：$x=1$ 或 $x=2$，

因为 $a>0$，所以令 $g'(x)>0$，得 $x<1$ 或 $x>2$，

令 $g'(x)<0$，得 $1<x<2$，

则 $g(x)$在$(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$上单调递增，在$(1,2)$上单调递减，

$g(1)=6a$，$g(2)=5a$，如图所示，



当 $5a<b<6a$ 时，$y=g(x)$与 $y=b$ 图象有 3 个交点，即过点 A 可以作曲线 $y=f(x)$的 3 条切线，所以 D 错误.

故选 ABC.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13.【答案】$\frac{3}{2}$

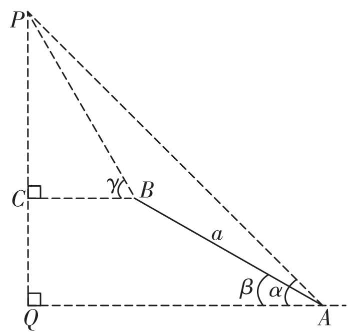
【解析】$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(-1,2-m)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(-3,3-m)$，$-1\cdot(3-m)-(-3)(2-m)=0$，得 $m=\frac{3}{2}$.

14.【答案】-1

【解析】$\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi$，$\theta=\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin(\omega+\theta)=-1$.

15.【答案】$100(\sqrt{3}+1)$

【解析】如图，在$\triangle ABP$ 中，$\angle ABP=180^\circ-\gamma+\beta=150^\circ$，$\angle BPA=180^\circ-(\alpha-\beta)-\angle ABP=180^\circ-(\alpha-\beta)-(180^\circ-\gamma+\beta)=\gamma-\alpha=15^\circ$，



在$\triangle ABP$ 中，根据正弦定理$\frac{AP}{\sin\angle ABP}=\frac{AB}{\sin\angle APB}$，

即$\frac{AP}{\sin 150^\circ}=\frac{200}{\sin 15^\circ}$，$\therefore AP=\frac{100}{\sin 15^\circ}$，

$\therefore$山高 $PQ=AP\sin 45^\circ=\frac{100\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}=100(\sqrt{3}+1)$米.

16.【答案】$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】令 $m=x+y$，$n=x-y$，则 $m^2+3n^2=(x+y)^2+3(x-y)^2=4(x^2-xy+y^2)=8$，$8=m^2+3n^2\geqslant 2\sqrt{3}|mn|$，$\therefore |mn|\leqslant\frac{8}{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$（当且仅当$|m|=\sqrt{3}|n|=2$ 时等号成立），即$-\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqslant mn\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$，又$\therefore x^2-y^2=mn$，所以 x^2-y^2 的最大值是$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17.【解析】(1) $f(x)=4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，单调减区间为 $\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$;

(2) $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，$f(x)\in[-1,2]$，因此 $m>-1$.

18.【解析】(1) $S_5=5a_3=25a_1$，$\therefore d=2a_1$，

又 $a_2=2a_1+1=a_1+d$，$\therefore a_1=1$，$d=2$，$\therefore a_n=2n-1$;

(2) $b_n=(-1)^n\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{(-1)^n}{2n-1}-\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$，

$\therefore T_n=-1-\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

19.【解析】(1) $\because a=3$，$b+6\cos B=2c$，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\sin B+2\sin A\cos B=2\sin C$，

又 $\sin C=\sin(A+B)$，则 $\sin B+2\sin A\cos B=2\sin(A+B)$，即 $\sin B=2\cos A\sin B$，

$\because B\in(0,\pi)$，即 $\sin B\neq 0$，$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$，$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$;

(2)由(1)得 $A=\frac{\pi}{3}$，设 $\triangle ABC$ 的外接圆 M 的半径为 R，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $2R=\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{3}$，解得 $R=\sqrt{3}$，

则 $BM=CM=R=\sqrt{3}$，在 $\triangle BMC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BMC=\frac{BM^2+CM^2-BC^2}{2BM\cdot CM}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle BMC=\frac{2\pi}{3}$，$\angle MBD=\frac{\pi}{6}$，$\because MD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ 在 $\triangle BDM$ 中，由正弦定理得 $\sin\angle BDM=\frac{BM}{MD}\cdot\sin\angle MBD=1$，

$\therefore \angle BDM=\frac{\pi}{2}$，即 $MD\perp BC$，$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

20.【解析】(1)因为 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)=(x+1)e^{x+1}$，$f'(0)=e$，$f(0)=0$，故切线方程为 $y=ex$;

(2)令 $g(x)=f(x-1)-ax+1-2\sin x=(x-1)e^x-ax-2\sin x+1$，$x\in[0,2\pi]$，

则原不等式即为 $g(x)\geqslant 0$，显然 $g(0)=0$，

又 $g'(x)=xe^x-a-2\cos x$，且 $g'(0)=-a-2$，

再令 $h(x)=xe^x-a-2\cos x$，则 $h'(x)=(x+1)e^x+2\sin x$，

当 $0\leqslant x<\pi$ 时，$(x+1)e^x>0$，$2\sin x\geqslant 0$，所以 $h'(x)>0$ 恒成立，

当 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，$h'(x)=(x+1)e^x+2\sin x\geqslant(\pi+1)e^\pi+2\sin x>(\pi+1)e^\pi-2>0$，

所以当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，恒有 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上为增函数，

即 $g'(x)=xe^x-a-2\cos x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上为增函数，

①当 $-a-2\geqslant 0$，即 $a\leqslant -2$ 时，$g'(x)\geqslant g'(0)=-a-2\geqslant 0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上为增函数，所以 $g(x)_{\min}=g(0)=0$，$\therefore g(x)\geqslant 0$，不等式成立;

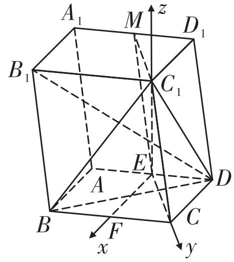
②当 $-a-2<0$，即 $a>-2$ 时，$g'(0)=-a-2<0$，

所以存在 $x_0\in(0,2\pi]$ 使得当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上为减函数，且 $g(x)<g(0)=0$，与题设不符，

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2]$.

21.【解析】(1)证明：如图，取 A_1D_1 中点 M，连接 C_1M，EM，则面 CC_1ME 即为所求截面，



由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=1$，$\angle ABC=60^\circ$，且 E 为 AD 的中点，

则在 $\triangle DCE$ 中，$DE=\frac{1}{2}AD=2$，$DC=1$，$\angle CDE=60^\circ$，

由余弦定理得，$CE=\sqrt{DE^2+DC^2-2DE\cdot DC\cos\angle EDC}=\sqrt{3}$，

所以 $CE^2+CD^2=DE^2$，即 $CD\perp EC$，

又由 $C_1C\perp CD$，且 $C_1C\cap EC=C$，CC_1，$EC\subset$ 平面 ECC_1，所以 $CD\perp$ 平面 ECC_1，

因为 $C_1E\subset$ 平面 ECC_1，所以 $C_1E\perp CD$，

又因为 $C_1E\perp EC$，且 $EC\cap CD=C$，EC，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $C_1E\perp$ 平面 $ABCD$，又 $C_1E\subset$ 平面 CC_1ME，$\therefore$ 平面 $CC_1ME\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)解：取 BC 的中点 F，连接 EF，则 $EF\perp EC$，又 $EF\subset$ 平面 $ABCD$，$C_1E\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $EF\perp C_1E$，以 E 为坐标原点，EF，EC，EC_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴和 z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，

设 $EC_1=a(a>0)$，可得 $C_1(0,0,a)$，$D(-1,\sqrt{3},0)$，$B(2,-\sqrt{3},0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$A(1,-\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=(-3,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,\sqrt{3},a)$，

设平面 BDC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BD}=-3x_1+2\sqrt{3}y_1=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC_1}=-2x_1+\sqrt{3}y_1+az_1=0\end{cases}$，

令 $y_1=\sqrt{3}$，可得 $x_1=2$，$z_1=\frac{1}{a}$，所以平面 BDC_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left(2,\sqrt{3},\frac{1}{a}\right)$，

又由 $\overrightarrow{AD}=(-2,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{CC_1}=(0,-\sqrt{3},a)$，

设平面 ADD_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AD}=-2x_2+2\sqrt{3}y_2=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DD_1}=-\sqrt{3}y_2+az_2=0\end{cases}$，

令 $y_2=\sqrt{3}$，可得 $x_2=3$，$z_2=\frac{3}{a}$，所以平面 ADD_1A_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=\left(3,\sqrt{3},\frac{3}{a}\right)$，

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{9+\frac{3}{a^2}}{\sqrt{4+3+\frac{1}{a^2}}\times\sqrt{9+3+\frac{9}{a^2}}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$，解得 $a=1$ 或 $a=\frac{\sqrt{7}}{7}$，

因为 $CC_1/\!/BB_1$，又 $CC_1\not\subset$ 平面 BDB_1，$BB_1\subset$ 平面 BDB_1，所以 $CC_1/\!/$ 平面 BDB_1，

当 $a=1$ 时，$V_{B_1-BDC_1}=V_{C_1-BDB_1}=V_{C-BDB_1}=V_{B_1-BDC}=\frac{1}{3}S_{\triangle BDC}\cdot EC_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times1\times\sin120^\circ\times1=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

当 $a=\frac{\sqrt{7}}{7}$ 时，$V_{B_1-BDC_1}=V_{C_1-BDB_1}=V_{C-BDB_1}=V_{B_1-BDC}=\frac{1}{3}S_{\triangle BDC}\cdot EC_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times1\times\sin120^\circ\times\frac{\sqrt{7}}{7}=\frac{\sqrt{21}}{21}$，

综上可得，三棱锥 B_1-BDC_1 的体积为$\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\frac{\sqrt{21}}{21}$.

22.【解析】(1) $f(x)=\frac{ax}{e^x}$，$\therefore f'(x)=\frac{a(1-x)}{e^x}$，

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,1)\uparrow$，$[1,+\infty)\downarrow$，$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=\frac{a}{e}$，

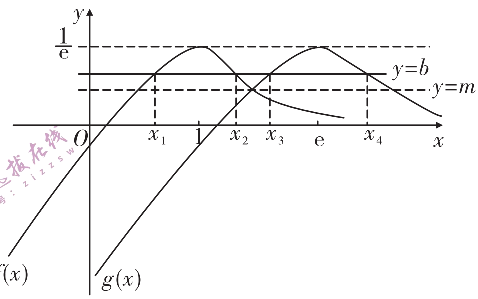
当 $a<0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,1)\downarrow$，$[1,+\infty)\uparrow$，$f(x)$无最大值，

$g(x)=\frac{\ln x}{ax}$，$\therefore g'(x)=\frac{1-\ln x}{ax^2}$，

当 $a>0$ 时，$g(x)$在$(0,e)\uparrow$，$[e,+\infty)\downarrow$，$\therefore g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{ae}$，

当 $a<0$ 时，$g(x)$在$(0,e)\downarrow$，$[e,+\infty)\uparrow$，$g(x)$无最大值，

$\because f(x)_{\max}=g(x)_{\max}$，$\therefore \frac{a}{e}=\frac{1}{ae}$，$\therefore a=1$；



(2)由(1)知，$f(x)=\frac{x}{e^x}$，$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，

$f(x)$在$(-\infty,1)\uparrow$，$[1,+\infty)\downarrow$且 $f(x)_{\max}=f(1)=\frac{1}{e}$，

$g(x)$在$(0,e)\uparrow$，$[e,+\infty)\downarrow$且 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$，

设两曲线交点的纵坐标为 m，当 $y=b\in\left(m,\frac{1}{e}\right)$时，从左到右四个交点的横坐标依次记为 x_1，x_2，x_3，x_4，且 $0<x_1<1<x_2<x_3<e<x_4$，

则 $f(x_1)=f(x_2)=g(x_3)=g(x_4)$，$\therefore \frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_3}{x_3}=\frac{\ln x_4}{x_4}$，

由$\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{\ln x_3}{x_3}=\frac{\ln x_3}{e^{\ln x_3}}$，且 $x_1,\ln x_3\in(0,1)$，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，$\therefore x_1=\ln x_3$，

由$\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_4}{x_4}=\frac{\ln x_4}{e^{\ln x_4}}$，且 $x_2,\ln x_4\in(1,+\infty)$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，$\therefore x_2=\ln x_4$，$\therefore x_4=e^{x_2}$，

$\therefore x_1x_4=\ln x_3\cdot e^{x_2}=x_3\cdot x_2$，结论得证，

同理：当 $y=b\in(0,m)$时，也有四个交点满足 $x_1x_4=x_2x_3$.