

长郡中学 2024 届高三期末适应性考 数 学

本试卷共 6 页，22 小题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

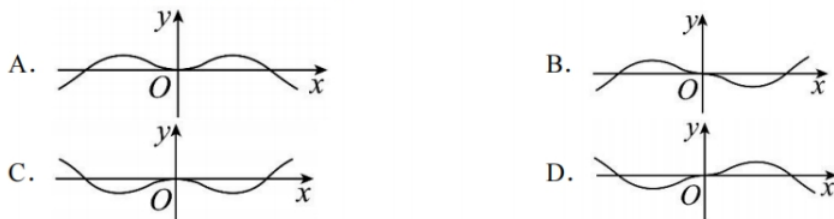
1. 已知复数 $z_1 = 12 - 3i$ ， $z_2 = -9 + i$ ，则 $z_1 + z_2$ 的实部与虚部分别为

- A. 3, -2 B. 3, -2i C. 2, -3 D. 2, -3i

2. 已知集合 $M = \{x | y = \ln(1 - 2x)\}$ ， $N = \{y | y = e^x\}$ ，则 $M \cap N =$

- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, \frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $\emptyset$

3. 函数 $f(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 的部分图象大致形状是



4. 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$ ， $\vec{b} = (1, 1)$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$ ，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量的坐标为

- A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. (1, 1) C. (-1, -1) D. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

数学试题 (第 1 页，共 6 页)

5. 已知角 θ 的始边为 x 轴非负半轴, 终边经过点 $(3, \sqrt{3})$, 将角 θ 的终边顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后得到角 β , 则 $\tan\beta =$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

6. 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 过 E 上的一点 A 作 l 的垂线, 垂足为 B , 若 $|AB| = 3|OF|$ (O 为坐标原点), 且 $\triangle ABF$ 的面积为 $12\sqrt{2}$, 则 E 的方程为

A. $y^2 = 4x$ B. $y^2 = 4\sqrt{3}x$ C. $y^2 = 8x$ D. $y^2 = 8\sqrt{3}x$

7. 一个轴截面是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形的圆锥型封闭容器内放入一个半径为 1 的小球 O_1 后, 再放入一个球 O_2 , 则球 O_2 的表面积与容器表面积之比的最大值为

A. $\frac{4}{81}$ B. $\frac{1}{27}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{27}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, 且 $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \sin x < \cos x \\ \sin x, & \sin x \geq \cos x \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 有 4 个不同实根 x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), 则 $f(x_1) \sin \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}$ 的取值范围是

A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. $(-\sqrt{2}, 1)$

- 二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

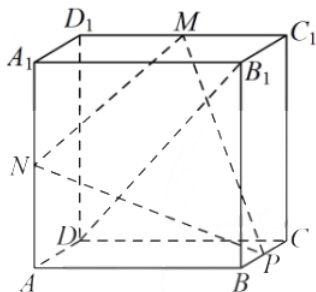
9. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则下列命题正确的是

A. 若 $ab \neq 0$ 且 $a < b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. 若 $a < b$, 则 $a^3 < b^3$
C. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{b+1}{a+1} < \frac{b}{a}$ D. 若 $a|a| < b|b|$, 则 $a < b$

10. 某食品的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 满足函数关系 $y = e^{kx+b}$ ($e = 2.718\cdots$ 为自然对数的底数, k, b 为常数). 若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时, 在 14°C 的保鲜时间是 48 小时 (参考数据: $2.8^5 \approx 172$, $2.7^6 \approx 387$), 则下列说法正确的是

A. $b \in (5, 6)$

- B. 若该食品储藏温度是 21°C , 则它的保鲜时间是 16 小时
C. $k < 0$
D. 若该食品保鲜时间超过 96 小时, 则它的储藏温度不高于 7°C
11. 欧拉函数 $\varphi(n)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的函数值等于所有不超过正整数 n , 且与 n 互质的正整数的个数 (公约数只有 1 的两个正整数称为互质整数), 例如: $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, 则
- A. $\varphi(4) \cdot \varphi(6) = \varphi(8)$ B. 当 n 为奇数时, $\varphi(n) = n - 1$
C. 数列 $\{\varphi(2^n)\}$ 为等比数列 D. 数列 $\left\{\frac{\varphi(2^n)}{\varphi(3^n)}\right\}$ 的前 n 项和小于 $\frac{3}{2}$
12. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 M, N, P 分别是棱 C_1D_1, AA_1, BC 的中点, Q 为平面 PMN 上的动点, 且直线 QB_1 与直线 DB_1 的夹角为 30° , 则



- A. $DB_1 \perp$ 平面 PMN
B. 平面 PMN 截正方体所得的截面面积为 $3\sqrt{3}$
C. 点 Q 的轨迹长度为 π
D. 能放入由平面 PMN 分割该正方体所成的两个空间几何体内部 (厚度忽略不计) 的球的半径的最大值为 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(2x^2 + x - y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为_____ (用数字作答).
14. 某市统计高中生身体素质的状况, 规定身体素质指标值不小于 60 就认为身体素质合格. 现从全市随机抽取 100 名高中生的身体素质指标值 x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 100$), 经计算 $\sum_{i=1}^{100} x_i = 7200$, $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 100 \times (72^2 + 36)$. 若该市高中生的身体素质指标值服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则估计该市高中生身体素质的合格率为_____. (用百分数作答, 精确到 0.1%)
- 参考数据: 若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$,

$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0.9545, \quad P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0.9973.$$

15. 已知函数 $f(x) = e^{2x} - 2a(x-2)e^x - a^2x^2$ ($a > 0$) 恰有两个零点, 则 $a =$ _____.

16. 在 $1, 2, \dots, 50$ 中随机选取三个数, 能构成公差不少于 5 的等差数列的概率为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = 3$, $(n+1)^2 a_{n+1} + (2n+1)S_n = 2$.

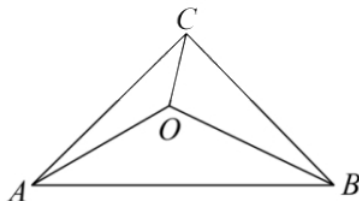
(1) 求 S_n ;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{n^2(2n-1)S_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , A 为锐角, $\triangle ABC$ 的面积为 S ,

$$4bS = a(b^2 + c^2 - a^2).$$

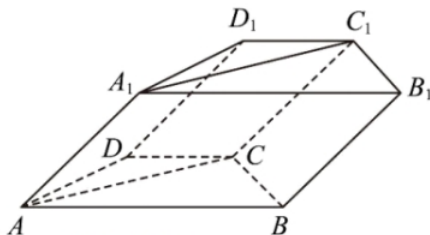


(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由;

(2) 如图, 若 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $BC = \sqrt{5}$, O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $OC = 1$, $\angle AOC = \frac{3\pi}{4}$, 求 OB 的长.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 已知斜四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel CD$, 点 A_1 在底面 $ABCD$ 的射影为 O , 且 $AD = BC = CD = AA_1 = 1$, $AB = 2$, $A_1O = \frac{1}{2}$, $AA_1 \perp BC$.



(1) 求证: 平面 $ABCD \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;

(2) 若 M 为线段 B_1D_1 上一点, 且平面 MBC 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$, 求直线 A_1M 与平面 MBC 所成角的正弦值.

20. (本小题满分 12 分)

杭州亚运会的三个吉祥物是琮琚、宸宸和莲莲, 他们分别代表了世界遗产良渚古城遗址、京杭大运河和西湖, 分别展现了不屈不挠、坚强刚毅的拼搏精神, 海纳百川的时代精神和精致和谐的人文精神. 甲同学可采用如下两种方式购买吉祥物:

方式一: 以盲盒方式购买, 每个盲盒 19 元, 盲盒外观完全相同, 内部随机放有琮琚、宸宸和莲莲三款中的一个, 只有打开才会知道买到吉祥物的款式, 买到每款吉祥物是等可能的;

方式二: 直接购买吉祥物, 每个 30 元.

(1) 甲若以方式一购买吉祥物, 每次购买一个盲盒并打开. 当甲买到的吉祥物首次出现相同款式时, 用 X 表示甲购买的次数, 求 X 的分布列;

(2) 为了集齐三款吉祥物, 甲计划先一次性购买盲盒, 且数量不超过 3 个, 若未集齐再直接购买吉祥物, 以所需费用的期望值为决策依据, 甲应一次性购买多少个盲盒?

21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $F(-\sqrt{3}, 0)$, 点 $P(x, y)$ 是平面内的动点. 若以 PF 为直径的圆与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 内切, 记点 P 的轨迹为曲线 E .

(1) 求 E 的方程;

(2) 设点 $A(0, 1)$, $M(t, 0)$, $N(4-t, 0) (t \neq 2)$, 直线 AM , AN 分别与曲线 E 交于

点 S , T (S, T 异于 A), $AH \perp ST$, 垂足为 H , 求 $|OH|$ 的最小值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + mx + \frac{m}{x}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 已知 $k \in \mathbf{N}^*$, 若 $\forall a, b \in (0, +\infty)$,

当 $a > b$ 时, $\frac{2k(a-b)}{2\sqrt{ab}+a+b} + ma + f(b) + \frac{m}{a} < f(a) + \frac{m}{b} + mb$ 恒成立, 求 k 的最大值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线