高二数学试卷参考答案

1. A　双曲线$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{35}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}x=\pm\sqrt{7}x$.

2. D　由题意得$|OM|=\sqrt{2}$,圆M与圆O的半径之差为$3-1=2>\sqrt{2}$,所以圆O与圆M的位置关系为内含.

3. C　由题意得$B(4,0.8)$,设该抛物线的方程为$x^2=2py(p>0)$,则$4^2=2p\times0.8$,得$p=10$,所以该抛物线的焦点为$(0,5)$.

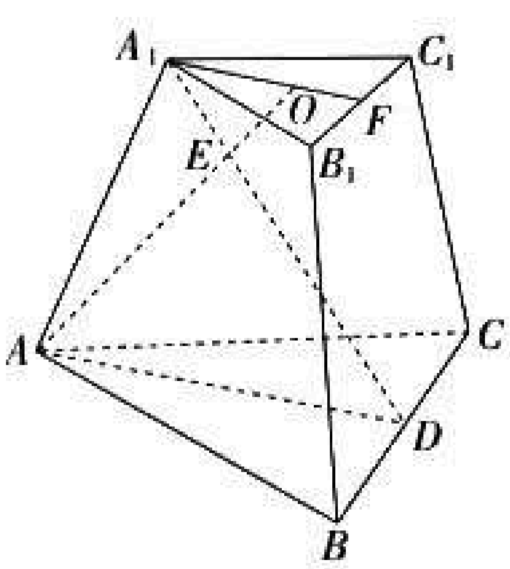
4. A　设直线l与平面α所成的角为$\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$,则$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{2}$,所以$\theta=\frac{\pi}{6}$.

5. B　由题意得圆$M:(x-1)^2+(y-2)^2=7$,则圆心M到直线$x+2y=0$的距离为$\frac{|1+2\times2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$,所以$|AB|=2\sqrt{7-5}=2\sqrt{2}$.

6. B　由题意得该椭圆的半长轴长为$\frac{13}{2}$厘米,半短轴长为$\frac{19}{4}$厘米,所以该椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{(\frac{13}{2})^2-(\frac{19}{4})^2}}{\frac{13}{2}}=\frac{3\sqrt{35}}{26}$.

7. C　由题意得$AB=\sqrt{a^2+b^2}=c$,则$\begin{cases}2b-2a=2,\\ ab=\frac{2\sqrt{5}}{5}ac,\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$得$\begin{cases}a=1,\\ b=2,\\ c=\sqrt{5},\end{cases}$所以$C$的焦距为$2c=2\sqrt{5}$.

8. D　如图,延长A_1O交B_1C_1于点F,则F为B_1C_1的中点,$A_1O=\frac{2}{3}A_1F=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}AD=\frac{1}{3}AD$.易得$\triangle A_1EO\backsim\triangle DEA$,则$\frac{A_1E}{DE}=\frac{A_1O}{DA}=\frac{1}{3}$,得$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{8}(6\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,所以$|\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{8}\sqrt{(6\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}$



$=\frac{1}{8}\sqrt{36\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+12\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+12\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\frac{\sqrt{178}}{8}$.

9. BCD　由题意得$\begin{cases}1\times(-B)=A\times(-1),\\ 1\times A-1\times2=0,\end{cases}$得$A=B=2$,则$l_1,l_2$之间的距离为$\frac{|-10-3|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$.由$\begin{cases}2x-2y+3=0,\\ 2x+2y+1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1,\\ y=\frac{1}{2},\end{cases}$所以$l_2,l_3$的交点坐标为$(-1,\frac{1}{2})$.

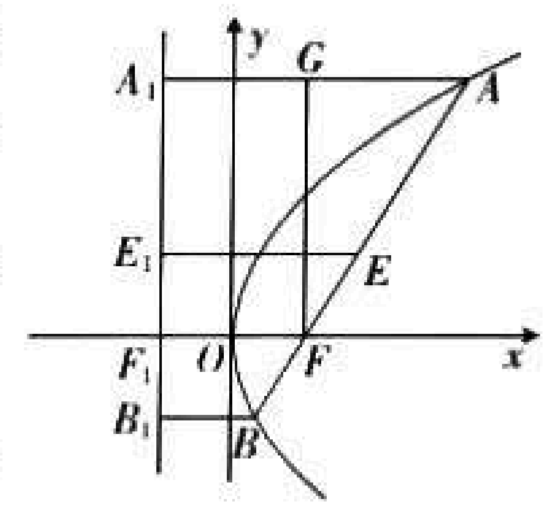
10. AC　由 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，$|PF_1|=4$，得 $|PF_2|=2$.

由 $\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，得 $\cos\angle F_1PF_2=\pm\dfrac{1}{4}$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，

得 $4c^2=16$ 或 24，即 $c^2=4$ 或 6，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{3}$.

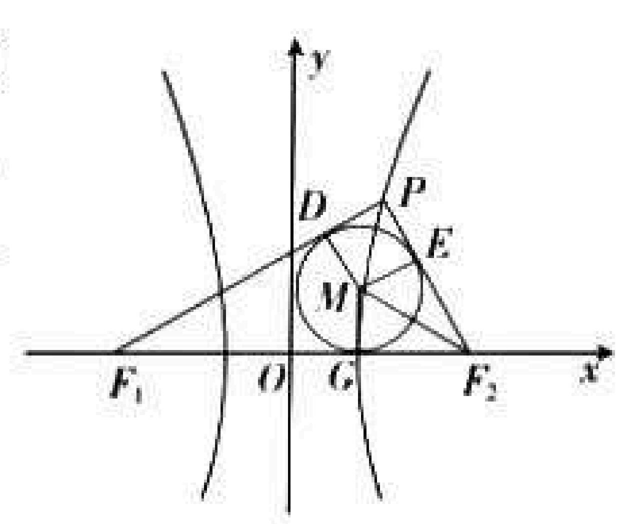
11. ABD　如图，设点 B 在 C 的准线上的投影为点 B_1，取 AB，A_1B_1 的中点分别为 E，E_1，过 F 作 $FG\perp AA_1$，垂足为点 G. 设 $|AF|=3|BF|=3m$，则 $|AA_1|=3|BB_1|=3m$，$|EE_1|=\dfrac{|AA_1|+|BB_1|}{2}=2m$，$|FF_1|=\dfrac{|BB_1|+|EE_1|}{2}=\dfrac{3m}{2}$，$|FG|=\sqrt{|AF|^2-(|AA_1|-|FF_1|)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}m}{2}$，



所以四边形 AA_1F_1F 的面积为 $\dfrac{|AA_1|+|FF_1|}{2}\cdot|FG|=\dfrac{27\sqrt{3}m^2}{8}=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$，解得 $|BF|=m=2$，$|F_1F_2|=p=\dfrac{3m}{2}=3$，A，B 正确.

由 $\sin\angle AFG=\dfrac{|AG|}{|AF|}=\dfrac{1}{2}$，得 $\angle AFG=\dfrac{\pi}{6}$，当 A 在第一象限，B 在第四象限时，直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$，当 A 在第四象限，B 在第一象限时，直线 l 的斜率为 $-\sqrt{3}$，C 错误. 点 A 的横坐标为 $3m-\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$，D 正确.

12. ABC　如图，设圆 M 与 x 轴相切于点 G，与 PF_1 和 PF_2 分别相切于 D，E 两点. 由内切圆的性质得 $|PD|=|PE|$，$|F_1D|=|F_1G|$，$|F_2G|=|F_2E|$，则 $|PF_1|-|PF_2|=|PD|+|F_1D|-(|PE|+|F_2E|)=|F_1D|-|F_2E|=|F_1G|-|F_2G|=2a$.



因为 $|F_1G|+|F_2G|=2c$，所以 $|F_2G|=c-a$，则 G 为 C 的右顶点.

因为直线 PF_2 的斜率小于 -2，所以 $\tan\angle PF_2O>2$. 又 F_2M 平分 $\angle PF_2A$，所以 $\tan\angle PF_2O=\dfrac{2\tan\angle MF_2G}{1-\tan^2\angle MF_2G}>2$. 易得 $\angle PF_2O<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\angle MF_2G<\dfrac{\pi}{4}$，$\tan\angle MF_2G<1$，所以 $\tan^2\angle MF_2G+\tan\angle MF_2G-1>0$，解得 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\tan\angle MF_2G<1$.

在 $\triangle MF_2G$ 中，$\tan\angle MF_2G=\dfrac{a}{c-a}$，则 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\dfrac{a}{c-a}<1$，解得 $2<e=\dfrac{c}{a}<\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$.

13. 100°　由题意得直线 l_2 的倾斜角为 120°，所以直线 l_1 的倾斜角为 100°.

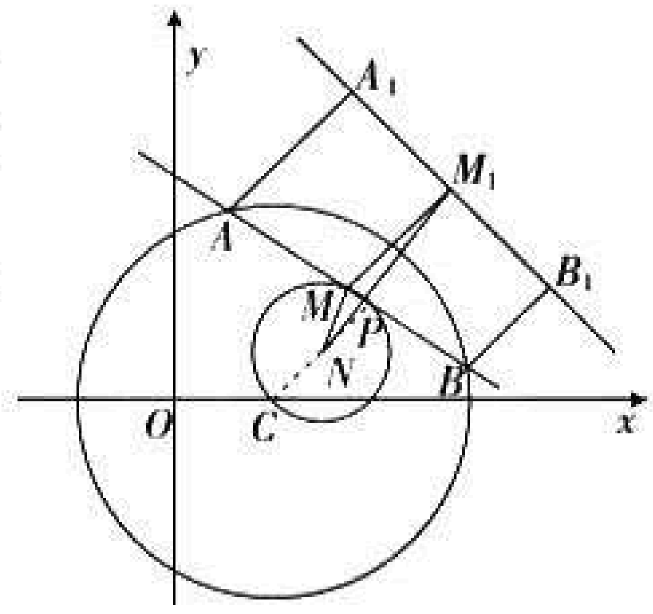
14. $(1,2,2)$（答案不唯一，例如：$(2,1,2)$，$(2,2,1)$，坐标 (x,y,z) 满足 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\x+y+z=5\end{cases}$ 即可）

设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x+y+z}{3\times\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\x+y+z=5.\end{cases}$

15. $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{7}=1(y<0)$（备注：$y<0$ 也可写成 $y\leqslant-3$）　由题意得 $|CA|-|CB|=2\times3=6<$

$|AB|=8$，所以 C 的轨迹是以 A,B 为焦点，且实轴长为 6 的双曲线的下支. 由 $a=3,c=4$，得 $b^2=c^2-a^2=7$，所以 C 的轨迹方程为 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1(y<0)$.

16. 8　如图，设 AB 的中点为 M，A,B,M 在直线 $l:x+y-10=0$ 上的投影分别为 A_1,B_1,M_1. 圆心 $C(2,0)$ 到直线 $l:x+y-10=0$ 的距离 $d=\frac{|2-10|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}>4$，所以直线 l 与圆 C 相离. 易得 $CM\perp AB$，即 $CM\perp MP$（当 M,C 重合时，$MP\perp AB$，当 M,P 重合时，$CM\perp AB$），所以点 M 在以 CP 为直径的圆上，其圆心为 $N(3,1)$，半径为 $\sqrt{2}$.



由题意得 $|x_1+y_1-10|+|x_2+y_2-10|=\sqrt{2}(\frac{|x_1+y_1-10|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-10|}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}(|AA_1|+|BB_1|)=2\sqrt{2}|MM_1|$. 因为 $|NM_1|=\frac{|3+1-10|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，所以 $|MM_1|\geqslant|NM_1|-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，所以 $|x_1+y_1-10|+|x_2+y_2-10|=2\sqrt{2}|MM_1|\geqslant 8$.

17. 解：设 A 关于 x 轴对称的点为 C，则 $C(0,-3)$，…………………………………………… 2 分

所以直线 BC 的斜率为 $\frac{7+3}{2-0}=5$，…………………………………………………………… 4 分

直线 BC 的斜截式方程为 $y=5x-3$，即反射光线所在直线的一般式方程为 $5x-y-3=0$.
……………………………………………………………………………………………………… 6 分

令 $y=5x-3=0$，得 $x=\frac{3}{5}$，所以入射点的坐标为 $(\frac{3}{5},0)$. ………………………………… 10 分

18. 解：(1) 由题意可知点 P 到 $F(0,4)$ 的距离等于它到直线 $y=-4$ 的距离，……………… 2 分

则 P 的轨迹是以 $F(0,4)$ 为焦点的抛物线，…………………………………………………… 4 分

所以 C 的方程为 $x^2=16y$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2\times(-4)=-8$. ………………………………… 7 分

由 $\begin{cases}x_1^2=16y_1,\\x_2^2=16y_2,\end{cases}$ ……………………………………………………………………… 8 分

得 $x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)=16(y_1-y_2)$，……………………………………………… 10 分

所以 l 的斜率为 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{16}=-\frac{1}{2}$. ……………………………………………… 12 分

19. 解：(1) 设圆 $C:(x-a)^2+y^2=r^2(r>0)$，………………………………………………… 1 分

由题意得 $\begin{cases}|a|=r,\\(3-a)^2+9=r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\r=3,\end{cases}$ ……………………………………………… 4 分

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+y^2=9$. ………………………………………………………… 5 分

(2) 设 $M(x,y)$，$-3\leqslant y\leqslant 3$，由 $(x-3)^2+y^2=9$，得 $x^2-6x+y^2=0$，……………… 7 分

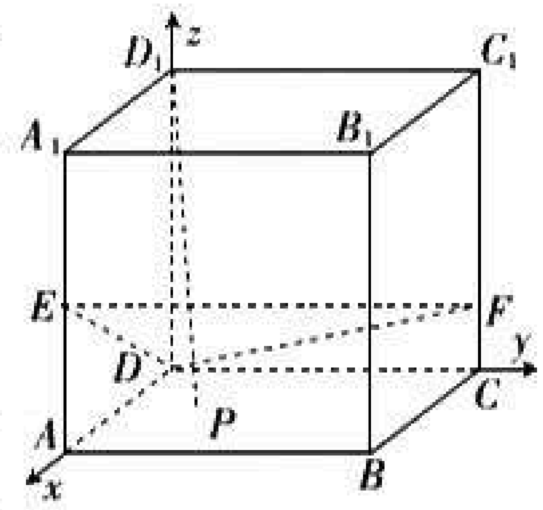
则 $|MA|^2+|MB|^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(x-4)^2+(y-1)^2=2(x^2-6x+y^2)-4y+22$
$=-4y+22$. ……………………………………………………………………………………… 9 分

当 $y=3$ 时，$|MA|^2+|MB|^2$ 取得最小值，最小值为 10； …………………………………… 10 分

当 $y=-3$ 时，$|MA|^2+|MB|^2$ 取得最大值，最大值为 34. …………………………………… 11 分

故 $|MA|^2+|MB|^2$ 的取值范围为 $[10,34]$. …………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $E(4,0,2)$，$F(0,4,1)$，$D_1(0,0,4)$，………… 1 分



$\overrightarrow{DE}=(4,0,2)$，$\overrightarrow{DF}=(0,4,1)$. ………………………………… 2 分

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=4x+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=4y+z=0,\end{cases}$ …

……………………………………………………………… 3 分

取 $y=1$，则 $x=2$，$z=-4$，得 $\boldsymbol{n}=(2,1,-4)$. ……………………… 4 分

因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,4)$， ………… 5 分

则平面 $ABCD$ 与平面 DEF 夹角的余弦值为 $|\cos\langle\overrightarrow{DD_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{DD_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DD_1}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$. … 7 分

(2)设 $P(a,b,0)$，则 $\overrightarrow{D_1P}=(a,b,-4)$. …………………………………………… 8 分

因为 $D_1P\perp$ 平面 DEF，所以 $\overrightarrow{D_1P}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{-4}{-4}$，得 $a=2$，$b=1$，即 $P(2,1,0)$. …… 10 分

因为 $\overrightarrow{DP}=(2,1,0)$，所以点 P 到平面 DEF 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$. …………… 12 分

21. 解：(1)设直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{10}}{10}x$，

由 $\begin{cases}y=\dfrac{\sqrt{10}}{10}x,\\ \dfrac{x^2}{5}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\sqrt{10},\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\sqrt{10},\\ y=-1,\end{cases}$ …………………………………… 2 分

所以 $|AB|=\sqrt{(1+1)^2+(\sqrt{10}+\sqrt{10})^2}=2\sqrt{11}$. ………………………………… 4 分

(2)因为 A，B 是 C 上关于坐标原点 O 对称的两点，且直线 AP 与直线 BP 的斜率存在，所以直线 AP 与直线 BP 的斜率均不为 0.

设 $A(x_1,y_1)$，$P(m,m-3)$，则 $B(-x_1,-y_1)$，$x_1\neq\pm m$， ………………………… 5 分

所以 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{y_1-m+3}{x_1-m}\cdot\dfrac{-y_1-m+3}{-x_1-m}=\dfrac{y_1^2-(m-3)^2}{x_1^2-m^2}$. ………………………… 6 分

由 $\dfrac{x_1^2}{5}-y_1^2=1$，得 $y_1^2=\dfrac{x_1^2}{5}-1$，则 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{y_1^2-(m-3)^2}{x_1^2-m^2}=\dfrac{\dfrac{x_1^2}{5}-1-(m-3)^2}{x_1^2-m^2}$. ……… 8 分

若直线 AP 与直线 BP 的斜率之积为定值，则 $\dfrac{1}{5}=\dfrac{-1-(m-3)^2}{-m^2}$， …………………… 9 分

化简得 $2m^2-15m+25=(m-5)(2m-5)=0$，得 $m=5$ 或 $\dfrac{5}{2}$， …………………………… 10 分

此时 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{\dfrac{x_1^2}{5}-1-(m-3)^2}{x_1^2-m^2}=\dfrac{1}{5}$. …………………………………………… 11 分

故在直线 $y=x-3$ 上存在点 $P(5,2)$ 或 $P(\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$，使得直线 AP 与直线 BP 的斜率之积为定值 $\frac{1}{5}$. ………………………………………………………… 12 分

22.(1)解：由题意得 $\begin{cases}a^2+b^2=3,\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a^2=2,\\ b^2=1,\\ c^2=1,\end{cases}$ ………………………………………… 2 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………… 3 分

(2)证明：当 l_1,l_2 的斜率等于 0 时，$|PQ|=2\sqrt{3-1}=2\sqrt{2}$，$|MN|=2\sqrt{2}$，所以 $|PQ|^2+\frac{8\sqrt{2}}{|MN|}=12$. ………………………………………………………… 4 分

当 l_1,l_2 的斜率不等于 0 时，设 $l_1:x=my+t$，则 $l_2:x=my-1$.

由 $\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+2mty+t^2-2=0$，

令 $\Delta=(2mt)^2-4(m^2+2)(t^2-2)=0$，得 $t^2=m^2+2$. ……………………………… 6 分

设 O 到 l_1 的距离为 d，则 $d=\frac{|0+0-t|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|t|}{\sqrt{m^2+1}}$，……………………………… 7 分

得 $|PQ|=2\sqrt{3-d^2}=2\sqrt{\frac{3m^2+3-t^2}{m^2+1}}=2\sqrt{\frac{3m^2+3-(m^2+2)}{m^2+1}}=2\sqrt{\frac{2m^2+1}{m^2+1}}$. ……… 8 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2-2my-1=0$，则 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2},\\ y_1y_2=-\frac{1}{m^2+2},\end{cases}$

………………………………………………………………………………… 9 分

则 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\frac{4m^2}{(m^2+2)^2}+\frac{4}{m^2+2}}=\frac{2\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$.

………………………………………………………………………………… 11 分

故 $|PQ|^2+\frac{8\sqrt{2}}{|MN|}=\frac{4(2m^2+1)}{m^2+1}+\frac{8\sqrt{2}(m^2+2)}{2\sqrt{2}(m^2+1)}=\frac{4(3m^2+3)}{m^2+1}=12$.

综上，$|PQ|^2+\frac{8\sqrt{2}}{|MN|}$ 是定值. ………………………………………………… 12 分