2023—2024 学年高二(上)质检联盟第四次月考
数学参考答案

1. C　因为 $s'=60-gt$,所以当 $t=5$ s 时,$s'=60-5g=10$ m/s.

2. B　由 $(a+5)a-2\times3=(a-1)(a+6)=0$,解得 $a=-6$ 或 $a=1$. 当 $a=-6$ 时,两直线重合;当 $a=1$ 时,符合题意.

3. D　因为 $\frac{a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}=2$,所以 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n-2}$. 因为 $a_1=1$,所以 $a_2=\frac{2\times1}{1-2}=-2$,$a_3=\frac{2\times(-2)}{-2-2}=1$,…,所以 $\{a_n\}$ 是周期为 2 的数列,故 $a_{2024}=a_2=-2$.

4. D　因为点 A 到 C 的焦点的距离为 18,到 x 轴的距离为 12,所以 $\frac{p}{2}=6$,则 $p=12$.

5. B　因为两圆有四条公切线,所以两圆外离. 因为圆 C 的圆心为 $(3\sqrt{2},-3)$,半径为 4,圆 D 的圆心为 $(-\sqrt{2},4)$,半径为 $\sqrt{18-m}$,所以 $\sqrt{(3\sqrt{2}+\sqrt{2})^2+(-3-4)^2}>4+\sqrt{18-m}$,得 $m\in(-7,18)$.

6. B　由题意可知,每一天收到的捐款成等差数列,首项为 20,公差为 15,设这次募捐活动一共进行了 n 天,则 $20n+\frac{n(n-1)}{2}\times15=5000$,得 $n=25$.

7. B　记 E 的右焦点为 F_1,MF 的中点为 P,连接 MF_1,PF_1(图略),因为 $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NF}$,$O$ 为 FF_1 的中点,所以 $ON/\!/PF_1$,则 $MF\perp PF_1$,从而 $|MF_1|=|FF_1|=2c$. 又 $\tan\angle MFF_1=\frac{\sqrt{7}}{3}$,所以 $\cos\angle MFF_1=\frac{|MF|}{2|FF_1|}=\frac{3}{4}$,则 $|MF|=3c$,$|MF|-|MF_1|=3c-2c=c=2a$,故 E 的离心率为 2.

8. B　因为 $a_1a_2a_3\cdots a_n=2^{\frac{n^2+n}{2}}$,所以 $a_1=2$. 当 $n\geqslant2$ 时,$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}=2^{\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}}$,所以 $a_n=2^n$. 因为 $n=1$ 也满足,所以 $a_n=2^n$. 令 $g(x)=\frac{(x-a_2)(x-a_4)\cdots(x-a_{2024})}{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_{2023})}$,则 $f(x)=xg(x)$,$f'(x)=g(x)+xg'(x)$,所以 $f'(0)=g(0)=\frac{(-a_2)(-a_4)\cdots(-a_{2024})}{(-a_1)(-a_3)\cdots(-a_{2023})}=2^{1012}$.

9. BD　由椭圆 C 的方程可知 $a=\sqrt{11}$,$b=\sqrt{2}$,$c=3$,且椭圆 C 的焦点在 y 轴上,所以椭圆 C 的长轴长为 $2\sqrt{11}$,焦距为 6,短半轴长为 $\sqrt{2}$,离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$.

10. AD　设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,因为 $S_8=-556=8a_1+28d$,$a_{n+2}-a_n=6=2d$,所以等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 -80,公差为 3,所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-83$,$a_{27}<0$,$a_{28}>0$,故 A 正确,B 不正确;

因为 $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{3n^2-163n}{2}$,所以使 $S_n<0$ 的 n 的最大值为 54,故 C 不正确;

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{54}|=S_{54}-2S_{27}=\frac{(3\times54-163)\times54}{2}-2\times\frac{(3\times27-163)\times27}{2}=$

$81\times27=3^7$,故 D 正确.

11. BD　$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$,令 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=2>0$,即 $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 没有极值点,故 A 错误;

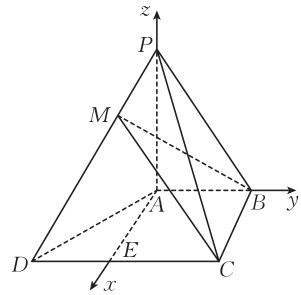
因为 $f(1)=0$,所以 $f(x)$ 存在唯一零点 1,故 B 正确;

令 $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1=2$,则 $x=1$,即切点为 $(1,0)$,所以切线方程为 $y=2(x-1)$,即 $2x-y-2=0$,故 C 错误;

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$f(ax)\geqslant f(\ln x)$,所以 $\ln x>0$,$ax\geqslant\ln x$,所以 $a\geqslant\frac{\ln x}{x}$,

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,所以 $h(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增,在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$,所以 $a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$,故 D 正确.

12. AB　过 A 作 $AE\perp CD$,垂足为 E,则 $DE=3$,



以 A 为坐标原点,分别以 AE,AB,AP 所在直线为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,则 $B(0,3,0)$,$C(3,3,0)$,$D(3,-3,0)$,$P(0,0,3)$,$M(1,-1,2)$,$\overrightarrow{BM}=(1,-4,2)$,$\overrightarrow{CM}=(-2,-4,2)$,$\overrightarrow{PC}=(3,3,-3)$,$\overrightarrow{BC}=(3,0,0)$,$\overrightarrow{BP}=(0,-3,3)$,$\overrightarrow{AD}=(3,-3,0)$.

因为 $\cos\langle\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AD}\rangle=\frac{\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{CM}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{(-2)\times3+(-4)\times(-3)}{2\sqrt{6}\times3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,所以直线 CM 与 AD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$,故 A 正确.

因为 $|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{21}$,所以 B 正确.

因为 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{PC}=1\times3+(-4)\times3+2\times(-3)=-15\neq0$,所以 BM 与 PC 不垂直,故 C 不正确.

设点 M 到直线 BC 的距离为 d,则 $d=\sqrt{|\overrightarrow{BM}|^2-|\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}|^2}=2\sqrt{5}$,

即点 M 到直线 BC 的距离为 $2\sqrt{5}$,故 D 不正确.

13. $4\sqrt{5}$　易知直线 l 恒过点 $P(1,2)$,因为点 P 在圆 C 的内部,且 $|PC|=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$,所以直线 l 被圆 C 截得的弦长的最小值为 $2\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=4\sqrt{5}$.

14. $-\frac{4}{3}$　等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 一定形如 AB^n-A,所以 $t=-\frac{4}{3}$.

15. $[0,8)$　因为 $f(x)$ 在区间 $(-2,2)$ 内只有极小值,无极大值,所以 $f'(x)=(x^2+2x-a)\mathrm{e}^x=0$ 在区间 $(-2,2)$ 内只有一个左负右正的异号根,即关于 x 的方程 $x^2+2x-a=0$ 在区间

$(-2,2)$内只有一个左负右正的异号根，所以$\begin{cases}(-2)^2+2\times(-2)-a\leqslant 0,\\ 2^2+2\times 2-a>0,\end{cases}$得 $a\in[0,8)$.

16. $\sqrt{2}$　因为$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2})$，

所以$|\overrightarrow{PO}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{PF_1}|^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+|\overrightarrow{PF_2}|^2)$

$=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{PF_1}|^2+2|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\cos\angle F_1PF_2+|\overrightarrow{PF_2}|^2)$.

由余弦定理得 $4a^2=|\overrightarrow{PF_1}|^2-2|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\cos\angle F_1PF_2+|\overrightarrow{PF_2}|^2$，

所以$|\overrightarrow{PO}|^2=a^2+|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\cos\angle F_1PF_2=a^2+a^2\cos\angle F_1PF_2\leqslant 2a^2=2$，所以$|PO|$的最大值为$\sqrt{2}$.

17. 解：(1)因为 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+30$，所以 $f'(x)=6(x^2+x-6)$. …………………… 1 分

因为 $f'(1)=-24$，$f(1)=-1$， …………………… 3 分

所以所求切线方程为 $y+1=-24(x-1)$，即 $24x+y-23=0$. …………………… 5 分

(2) $f'(x)=6(x^2+x-6)=6(x+3)(x-2)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$ 或 $x=2$. ……… 6 分

当 $x\in[-3,2)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(2,5]$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$[-3,2)$上单调递减，在$(2,5]$上单调递增. …………………… 7 分

因为 $f(2)=-14$，所以 $f(x)_{\min}=f(2)=-14$. …………………… 8 分

因为 $f(-3)=111$，$f(5)=175$，所以 $f(x)_{\max}=f(5)=175$， …………………… 9 分

故 $f(x)$在$[-3,5]$上的最小值为-14，最大值为 175. …………………… 10 分

18. 解：(1)设$\{a_n\}$的公比为 q，由 $a_4=a_3+2a_2$，得 $q^2-q-2=0$， …………………… 2 分

解得 $q=2$ 或 $q=-1$(舍去)， …………………… 4 分

因为 $a_1=4$，所以 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^{n+1}$. …………………… 6 分

(2)由(1)可知，$b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^{n+1}=n+1$，则 $b_{n+1}-b_n=n+2-(n+1)=1$. ………… 8 分

因为 $b_1=2$，所以$\{b_n\}$是以 2 为首项，1 为公差的等差数列， …………………… 10 分

故 $S_n=nb_1+\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{n^2+3n}{2}$. …………………… 12 分

19. 解：(1)因为$|PQ|=\sqrt{2}|PF|=\sqrt{2}|QF|$， …………………… 2 分

所以 $PF\perp QF$，即 $PF\perp y$ 轴. …………………… 4 分

因为抛物线 C 的通径长为 $2p$，$|QF|=5+\frac{p}{2}$，

所以 $p=5+\frac{p}{2}$，得 $p=10$，

故抛物线 C 的方程为 $x^2=20y$. …………………… 6 分

(2)易知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的斜率为 k，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$\begin{cases}x_1^2=20y_1,\\ x_2^2=20y_2,\end{cases}$ …………………… 7 分

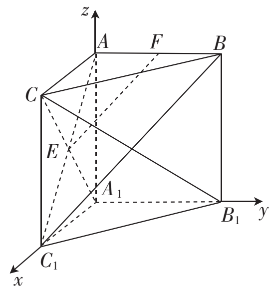
两式相减得 $x_1^2-x_2^2=20(y_1-y_2)$，整理得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{20}$. …………………… 9 分

因为 MN 的中点为$(-4,8)$，所以 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-8}{20}=-\frac{2}{5}$，…………………………… 11 分

所以直线 l 的方程为 $y-8=-\frac{2}{5}(x+4)$，即 $2x+5y-32=0$. ……………………………… 12 分

20. 解：(1)（方法一）因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B}-\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$，……………………………………………… 3 分



所以 $x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$，$z=0$. ……………………………………… 4 分

（方法二）连接 AC_1，BC_1，则 EF 是$\triangle ABC_1$ 的中位线.

因为$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1B}-\overrightarrow{B_1C_1})=\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B}-\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$，……… 3 分

所以 $x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$，$z=0$. ……………………………………… 4 分

注：也可以通过建系来求解.

(2)以 A_1 为原点，以 A_1C_1，A_1B_1，A_1A 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，则 $A(0,0,6)$，$C(2,0,6)$，$B_1(0,4,0)$，$E(1,0,3)$，$F(0,2,6)$，…………………… 6 分

所以$\overrightarrow{B_1C}=(2,-4,6)$，$\overrightarrow{AE}=(1,0,-3)$，$\overrightarrow{AF}=(0,2,0)$. ………………………………… 7 分

设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x-3z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=2y=0,\end{cases}$

取 $x=3$，可得 $y=0$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(3,0,1)$. ………………………………………… 9 分

设 B_1C 与平面 AEF 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{B_1C}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{B_1C}||\boldsymbol{n}|}=\frac{12}{2\sqrt{14}\times\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{35}}{35}$. … 12 分

21. 解：(1)因为 $nS_{n+1}=(n+2)S_n$，所以$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+2}{n}$，

所以$\frac{S_2}{S_1}=\frac{3}{1}$，$\frac{S_3}{S_2}=\frac{4}{2}$，$\frac{S_4}{S_3}=\frac{5}{3}$，…，$\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}=\frac{n}{n-2}$，$\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

累乘得$\frac{S_n}{S_1}=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，$n\geqslant 2$，所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$n\geqslant 2$.

因为 $S_1=a_1=1$ 符合上式，所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$. ………………………………………… 2 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(n-1)^2+n-1}{2}=\frac{n^2-n}{2}$，所以 $S_n-S_{n-1}=\frac{n^2+n-n^2+n}{2}$，即 $a_n=n(n\geqslant 2)$.

因为 $a_1=1$ 符合上式，所以 $a_n=n$. ……………………………………………………… 3 分

因为 $3b_{n+1}-b_n=2b_nb_{n+1}$，所以 $b_{n+1}=\frac{b_n}{3-2b_n}$，两边取倒数得$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{3-2b_n}{b_n}=\frac{3}{b_n}-2$，即$\frac{1}{b_{n+1}}-1$

$=3(\frac{1}{b_n}-1)$.

因为 $b_1=\frac{1}{a_3}=\frac{1}{3}$，所以数列$\{\frac{1}{b_n}-1\}$是首项为$\frac{1}{b_1}-1=2$，公比为 3 的等比数列，……… 5 分

所以$\frac{1}{b_n}-1=2\times 3^{n-1}$，故$b_n=\frac{1}{2\times 3^{n-1}+1}$. ………………………………………………… 6分

(2)由(1)知$\frac{a_n}{b_n}=2n\times 3^{n-1}+n$，所以$T_n=(2\times 3^0+4\times 3^1+6\times 3^2+\cdots+2n\times 3^{n-1})+(1+2+3+\cdots+n)=(2\times 3^0+4\times 3^1+6\times 3^2+\cdots+2n\times 3^{n-1})+\frac{n(n+1)}{2}$. …………………………… 8分

令$Q_n=2\times 3^0+4\times 3^1+6\times 3^2+\cdots+2n\times 3^{n-1}$，则$3Q_n=2\times 3^1+4\times 3^2+6\times 3^3+\cdots+2n\times 3^n$，

两式相减得$-2Q_n=2\times 3^0+2\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+2\times 3^{n-1}-2n\times 3^n$，

$-Q_n=3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times 3^n=\frac{1-3^n}{1-3}-n\times 3^n=\frac{3^n-1}{2}-n\times 3^n$，

所以$Q_n=(n-\frac{1}{2})\times 3^n+\frac{1}{2}$，………………………………………………………………… 11分

故$T_n=(n-\frac{1}{2})\times 3^n+\frac{1}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(2n-1)3^n+n^2+n+1}{2}$. ……………………………… 12分

22. (1)解：因为焦距为8，所以$c=4$. ………………………………………………………………… 1分

因为一条渐近线方程为$\sqrt{7}x-3y=0$，所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3}$. ……………………………………………… 3分

因为$a^2+b^2=c^2=16$，所以$a^2=9,b^2=7$,

所以双曲线C的方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$. ……………………………………………………………… 4分

(2)证明：由(1)知，M的横坐标为$\frac{9}{4}$，设直线MF_2的方程为$x=my+4$，则$y_M=-\frac{7}{4m}$.

联立方程组$\begin{cases}x=my+4,\\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1,\end{cases}$得$(7m^2-9)y^2+56my+49=0$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=\frac{-56m}{7m^2-9}$，$y_1y_2=\frac{49}{7m^2-9}$，$m\neq\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$. …………… 6分

因为$l/\!/OA$，所以直线l的方程为$y+\frac{7}{4m}=\frac{y_1}{my_1+4}(x-\frac{9}{4})$.

直线OB的方程为$y=\frac{y_2}{my_2+4}x$，

联立方程组$\begin{cases}y+\frac{7}{4m}=\frac{y_1}{my_1+4}(x-\frac{9}{4}),\\ y=\frac{y_2}{my_2+4}x,\end{cases}$得$y=\frac{4y_1y_2+\frac{7}{m}y_2}{4(y_1-y_2)}$，……………………………… 9分

由$y_1y_2=\frac{49}{7m^2-9}$，$y_1+y_2=\frac{-56m}{7m^2-9}$两式相除，得$\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=-\frac{7}{8m}$，则$y_1y_2=-\frac{7}{8m}(y_1+y_2)$，

……………………………………………………………………………………………………… 10分

所以$y_P=\frac{4y_1y_2+\frac{7}{m}y_2}{4(y_1-y_2)}=\frac{-\frac{7}{2m}(y_1+y_2)+\frac{7}{m}y_2}{4(y_1-y_2)}=\frac{-\frac{7}{2m}(y_1-y_2)}{4(y_1-y_2)}=-\frac{7}{8m}$. ………… 11分

因为$y_Q=0$，所以$y_P=\frac{y_M+y_Q}{2}$，故P为线段MQ的中点. ……………………………… 12分