

## 哈三中 2023—2024 学年度上学期高三学年期末考试

### 数学试卷

本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

- 注意事项：1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂，非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整，字迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不得折叠、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、刮纸刀。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

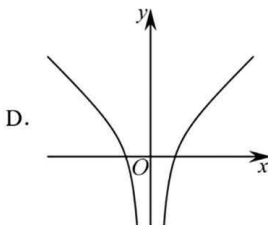
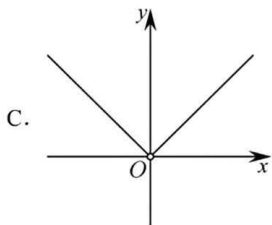
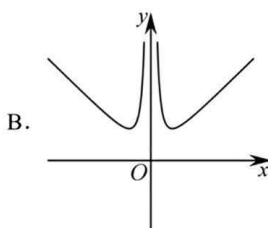
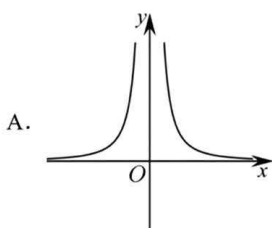
1. 已知  $A = \{x | \log_2 x < 1\}$ ,  $B = \left\{x \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1\right.\right\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $(-1, 2)$       B.  $(-1, 0)$       C.  $(0, 2)$       D.  $(1, 2)$

2. 复数  $z = \frac{1+2i}{i}$  的虚部为

- A.  $-1$       B.  $2$       C.  $-i$       D.  $i$

3. 函数  $f(x) = 2|x| + \frac{3}{x^2}$  的大致图象是



4. 若  $|a+b|=|a-b|$ ,  $a=(1,2)$ ,  $b=(m,3)$ , 则实数  $m=$
- A. 6                                      B. -6                                      C. 3                                      D. -3
5. 已知命题:  $\exists x_0 \in \mathbf{R}, ax_0^2 + 2ax_0 - 1 \geq 0$  为假命题, 则实数  $a$  的取值范围是
- A.  $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$       B.  $(-1, 0)$                               C.  $[-1, 0]$                               D.  $(-1, 0]$
6. 椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  和双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$  有相同的焦点  $F_1, F_2, P$  是两曲线的一个交点, 则  $\triangle PF_1F_2$  的面积为
- A.  $3\sqrt{7}$                                       B.  $6\sqrt{7}$                                       C.  $9\sqrt{7}$                                       D. 8
7. 等比数列  $\{a_n\}$  中,  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $\frac{S_5}{S_{10}} = \frac{1}{3}$ , 则  $\frac{S_{10}}{S_{15}} =$
- A.  $\frac{3}{7}$                                       B.  $\frac{7}{3}$                                       C.  $\frac{1}{2}$                                       D. 1
8. 哈三中第 38 届教改汇报课在 2023 年 12 月 15 日举行, 组委会派甲乙等 6 名志愿者到 AB 两个路口做引导员, 每位志愿者去一个路口, 每个路口至少有两位引导员, 若甲和乙不能去同一路口, 则不同的安排方案总数为
- A. 14                                      B. 20                                      C. 28                                      D. 40

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是
- A. 已知  $\alpha \in \left\{-1, \frac{1}{2023}, -\frac{1}{2023}, -2024\right\}$ , 若幂函数  $f(x) = x^\alpha$  为奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  上递减, 则  $\alpha$  只能为 -1
- B. 函数  $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2024x - 2023)$  的单调递减区间为  $(1, 1012)$
- C. 函数  $y = \sqrt[3]{(x-3)^3}$  与函数  $y = x - 3$  是同一个函数
- D. 已知函数  $f(2x+1)$  的定义域为  $[-1, 1]$ , 则函数  $f(x^2+2)$  的定义域为  $[-1, 1]$

10. 已知正数  $a, b$ ,  $a > b$  且  $a + b = 2$ , 则下列说法正确的是

- A.  $\frac{1}{a} > b$   
 B.  $e^a + a > e^b + b$   
 C.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 4$   
 D.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$

11. 在棱长为 1 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 下列结论正确的有

- A.  $A_1C_1 \parallel$  平面  $B_1CD$   
 B. 点  $C_1$  到平面  $B_1CD$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 C. 当  $P$  在线段  $C_1D_1$  上运动时, 三棱锥  $A_1 - B_1PC$  的体积不变  
 D. 若  $Q$  为正方体侧面  $BCC_1B_1$  上的一个动点,  $E, F$  为线段  $AC_1$  的两个三等分点, 则  $|QE| + |QF|$  的最小值为  $\frac{\sqrt{11}}{3}$

12. 已知函数  $f(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x (\omega > 0)$  在  $x = \frac{\pi}{6}$  处取得最大值 2,  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$ , 将  $y = f(x)$

图象上所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度得到  $g(x)$  的图象, 则下列结论正确的是

- A.  $x = \frac{\pi}{6}$  是  $f(x)$  的一条对称轴  
 B.  $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$   
 C.  $g\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  是奇函数  
 D. 方程  $g(x) - 2 \lg x = 0$  有 3 个实数解

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $\alpha$  为第二象限角,  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ , 则  $\tan 2\alpha =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知边长为 2 的等边三角形  $ABC$  所在平面外一点  $S$ ,  $D$  是  $AB$  边的中点, 满足  $SD$  垂直平面  $ABC$ , 且  $SD = \sqrt{3}$ , 则三棱锥  $S - ABC$  外接球的体积为\_\_\_\_\_.

试卷第 3 页, 共 6 页

15. 直线  $l$  与抛物线  $x^2 = 4y$  交于  $A, B$  两点且  $|AB| = 3$ , 则  $AB$  的中点到  $x$  轴的最短距离为\_\_\_\_\_.

16. 设  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上的奇函数, 对任意的  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  满足  $\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} > 0$

且  $f(3) = 15$ , 则不等式  $f(x) > 5x$  的解集为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $\sqrt{3}a = b(\sqrt{3}\cos C - \sin C)$ .

(1) 求角  $B$ ;

(2)  $D$  为  $AC$  边上一点,  $DB \perp BA$ , 且  $AD = 4DC$ , 求  $\cos C$  的值.

18. (12 分)

已知  $\{a_n\}$  是公差不为零的等差数列,  $a_1 = 1$ , 且  $a_1, a_2, a_5$  成等比数列.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = (-1)^{n+1} \frac{4n}{a_n \cdot a_{n+1}}$ , 求  $\{b_n\}$  的前 1012 项和  $T_{1012}$ .

19. (12分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右顶点为  $A_1, A_2$ , 点  $G$  是椭圆  $C$  的上顶点, 直线  $A_2G$  与圆  $x^2 + y^2 = \frac{8}{3}$  相切, 且椭圆  $C$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

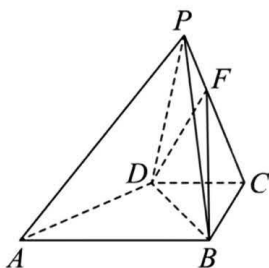
(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 过椭圆  $C$  右焦点  $F$  的直线  $l$  (与  $x$  轴不重合) 与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 若点  $M(0, m)$ , 且

$|MA| = |MB|$ , 求实数  $m$  的取值范围.

20. (12分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = CD = 2$ ,  $BP = DP = \sqrt{10}$ ,  $\angle BCD = 60^\circ$ ,  $AD \perp PD$ .



(1) 求证: 平面  $PBD \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 若线段  $PC$  上存在点  $F$ , 满足  $\overrightarrow{CF} = \lambda \overrightarrow{FP}$ , 且平面  $BDF$  与平面  $ADP$  的夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{130}}{130}$ ,

求实数  $\lambda$  的值.

21. (12分)

圆  $G$  经过点  $(2, 2\sqrt{3}), (-4, 0)$ , 圆心在直线  $y = x$  上.

(1) 求圆  $G$  的标准方程;

(2) 若圆  $G$  与  $x$  轴分别交于  $M, N$  两点,  $A$  为直线  $l: x = 16$  上的动点, 直线  $AM, AN$  与曲线圆  $G$  的另一个交点分别为  $E, F$ , 求证直线  $EF$  经过定点, 并求出定点的坐标.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}, g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, h(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ .

(1) 求函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处的切线方程;

(2) 当  $x > 0$  时, 试比较  $f(x), g(x), h(x)$  的大小关系, 并说明理由;

(3) 设  $n \in \mathbb{N}^*$ , 求证:  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} < \ln 2 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

