

2023 年普通高等学校招生全国统一考试 数学理科样卷(一)

本试卷共 23 题,共 150 分,考试时间 120 分钟,考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂;非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写,字体工整,笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出,确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁,不要折叠,不要弄破、弄皱,不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $z=(1-i)(a+i)$,若 \bar{z} 的虚部等于实部的两倍,则实数 $a=$
A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$
2. 已知集合 $A=\{x|\frac{1}{x}<1\}$, $B=\{x|-2<x<1\}$,则 $(\complement_{\mathbb{R}}A)\cap B=$
A. \emptyset B. $(-2,0]$ C. $(-2,1)$ D. $[0,1)$
3. 已知 $a\in\mathbb{R}$,则“ $a<0$ ”是“函数 $f(x)=\begin{cases} x+a, & x\leq 1 \\ 2^{x-1}, & x>1 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上单调递增”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,已知 $a_3=2a_1$,则一定成立的是
A. $a_2>a_5$ B. $a_n<a_{n+1}$
C. $S_9=0$ D. 数列 $\{S_n\}$ 有最大项

5. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y \geq 4 \\ x-2y+5 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z=x-y$ 有

- A. 最小值 -2 B. 最大值 -2 C. 最小值 2 D. 最大值 2

6. 已知直线 $x-y+3=0$ 是曲线 $y=x^3+mx+1$ 的一条切线, 则实数 $m=$

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

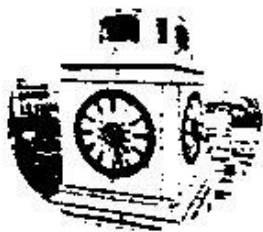
7. 中国饮食文化历史悠久, 博大精深, 是中国传统文化中最具特色的部分之一, 其内涵十分丰富. 根据义务教育课程方案, 劳动课正式成为中小学一门独立的课程, “食育”进入校园. 李老师计划在实验小学开展一个关于“饮食民俗”的讲座, 讲座内容包括日常食俗, 节日食俗, 祭祀食俗, 待客食俗, 特殊食俗, 快速食俗 6 个方面. 根据安排, 讲座分为三次, 每次介绍两个食俗内容(不分先后次序), 则节日食俗安排在第二次讲座, 且日常食俗与祭祀食俗不安排在同一次讲座中的概率为 来源: 高三答案公众号

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{5}$

8. 已知 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点, A 为 C 的虚轴的一个端点, $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}$ (O 为坐标原点), 直线 FB 垂直于 C 的一条渐近线, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}+1$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{17}+1}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

9. 钟鼓楼是中国传统建筑之一, 属于钟楼和鼓楼的合称, 是主要用于报时的建筑. 中国古代一般建于城市的中心地带, 在现代城市中, 也可以常常看见附有钟楼的建筑. 如图, 在某市一建筑物楼顶有一顶部逐级收拢的四面钟楼, 四个大钟对称分布在四棱柱



的四个侧面(四棱柱看成正四棱柱, 钟面圆心在棱柱侧面中心上). 在整点时刻(在 0 点至 12 点中取整数点, 含 0 点, 不含 12 点), 已知在 3 点时和 9 点时, 相邻两钟面上的时针所在的两条直线相互垂直, 则在 2 点时和 8 点时, 相邻两钟面上的时针所在的两条直线所成的角的余弦值为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$, 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到



函数 $g(x)$ 的图象,若 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恰有两个零点,则下列区间中, ω 的一个取值区间可以为

- A. $(2, \frac{7}{2})$ B. $(3, \frac{9}{2})$ C. $(4, \frac{11}{2})$ D. $(5, \frac{13}{2})$

11. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的各顶点都在球 O 的球面上, $AB=2$, 由 A, B, O 三点确定的平面 α 与侧棱 PC 交于点 E , 且 $2PE=3EC$, 则球 O 的表面积为

- A. 9π B. 12π C. 15π D. 18π

12. 设 $a=0.11e^{0.1}$, $b=\frac{1}{8}$, $c=3\ln 2 - \ln 7$, 则

- A. $a < c < b$ B. $c < b < a$ C. $a < b < c$ D. $b < c < a$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知不共线向量 a, b 满足 $a = (-\sqrt{3}, 1)$, $b = (m, m^2)$, 若 $a \cdot (a+b) = 1$, 则 $m =$ _____.

14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = -f(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 写出一个满足上述条件的函数: $f(x) =$ _____.

15. 过抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的直线 l 与 E 交于 A, B 两点, 设 $|AF| = 4|BF|$, B, C 两点关于 x 轴对称, 若 $\triangle AFC$ 的面积为 6, 则 $p =$ _____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 4$, 且 $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 3^{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_n =$ _____; 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n \geq 2023$, 则 n 的最小取值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 2, 4(\cos B + \cos C) = b + c$.

(1) 求 A ;

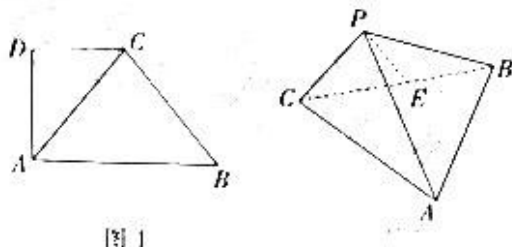
(2) AD 平分角 A , 交 BC 于点 D , 且 $AD = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12分)

在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90^\circ$, $CD = 2$, $AC = AB = 4$, 如图 1. 沿对角线 AC 将 $\triangle DAC$ 折起, 使点 D 到达点 P 的位置, E 为 BC 的中点, 如图 2.

(1) 证明: $PE \perp AC$.

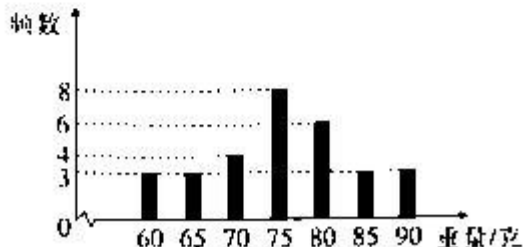
(2) 若二面角 $P-AC-B$ 的大小为 60° , 求直线 BP 与平面 PAC 所成角的正弦值.



19. (12分)

随着人们收入水平的提高, 特色化、差异化农产品的消费需求快速增长, 精品农产品获得广大消费者的认可. 某精品水果种植大户在水果采摘后, 一般先分拣出单个重量不达标的水果, 再按重量进行分类装箱. 现从同批采摘、分拣后堆积的水果堆中随机抽取了 30 个水果进行称重(为方便称重, 按 5 克为一级进行分级), 统计对应的水果重量, 得柱状图如下.

- 估计该批采摘的水果的单个水果的平均重量(精确到整数位);
- 在样本内, 从重量不低于 80 克的水果中, 随机选取 2 个, 记其中选取到水果重量不低于 90 克的个数为 X , 求 X 的分布列和数学期望;
- 用这个样本的频率分布估计总体分布, 将频率视为概率, 从采摘的水果堆中随机选取 n 个水果, 若要求其中至少有一个水果的重量不低于 80 克的概率不低于 90%, 求 n 的最小值.



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的三个顶点所确定的三角形的面积为 $2\sqrt{3}$,

$A(2, e)$ (e 是 C 的离心率) 是 C 上一点.

(1) 求 C 的方程;

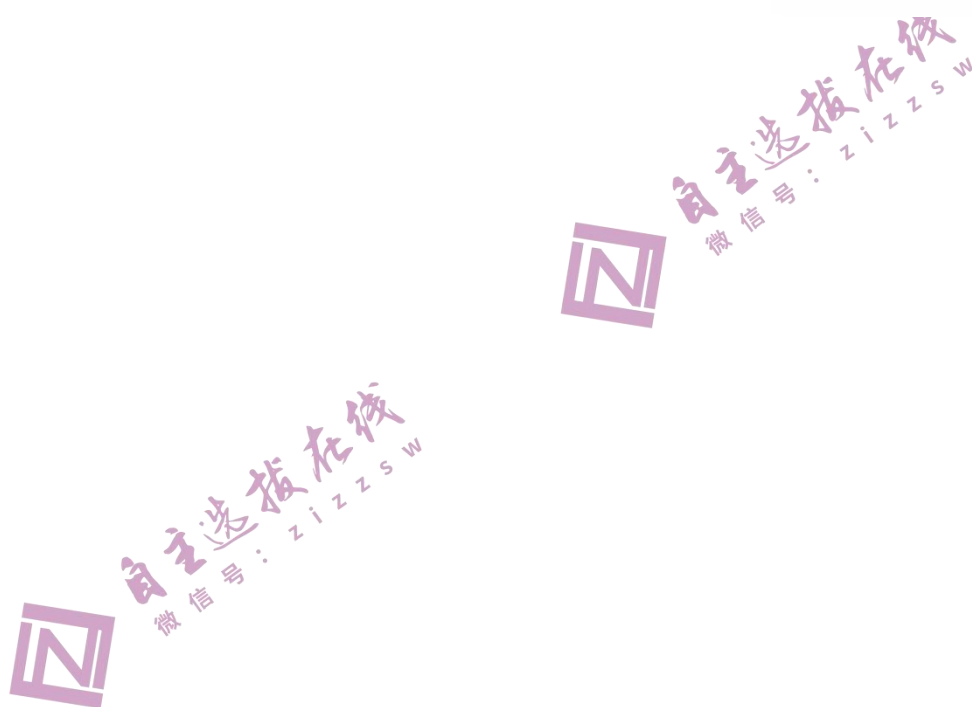
(2) 若直线 $l: y = k(x - 2)$ 与 C 交于 P, Q 两点, 设 $B(1, 0)$, 直线 PB, QB 与 C 分别交于 M, N (不同于 P, Q) 两点, 当 $k > 0$ 时, 记直线 PQ, MN 的倾斜角分别为 α, β . 求 $\tan(\alpha - \beta)$ 的最大值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = (2x + a)\ln x - 3(x - a), a > 0$.

(1) 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $x_1 + x_2 > 2e^{-\frac{1}{a}}$.



(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\sqrt{3}+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数, $\alpha \in [0, \pi)$),以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 E 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$,且直线 l 与曲线 E 交于 A, B 两点.

(1)求 α 的取值范围;

(2)设 $P(2\sqrt{3}, 0)$, C 为线段 AB 的中点,求 $\frac{|PC|}{|AB|}$ 的最小值.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x) = ax + 2$, $a \neq 0$.

(1)若 $-2 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \geq 1$ 恒成立,求 a 的取值范围;

(2)若 $g(x) = f(x) \cdot x - 2$ 的最小值为 1,求 a 的值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京,旗下拥有网站(网址: www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵,用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长,在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南,请关注自主选拔在线官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线