2023年秋期高中三年级期终质量评估

数学试题参考答案

一．选择题

1-8. CBDC　BDAC

二．选择题

9.AC　10.ACD　11.ABD　12.CD

三．填空题

13. -12　14. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　15. 89　16. $1+\sqrt{3}$

四．解答题（答案仅供参考，各小题若有其他解法，请酌情给分）

17.解析：（1）$\because \vec{m}=(a,b)$，$\vec{n}=\left(\sin B,-\sqrt{3}\cos A\right)$，且$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，

$\therefore a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$，

$\therefore$由正弦定理得$\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$.……2分

$\because 0<B<\pi$，$\therefore \sin B\neq 0$，$\therefore \sin A=\sqrt{3}\cos A$，$\tan A=\sqrt{3}$.

$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$.……5分

（2）$\because a=10$，$\therefore$由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=10^2$，

即$b^2+c^2-bc=100$.……7分

$\because b^2+c^2\geq 2bc$，$\therefore 100+bc\geq 2bc$，$\therefore bc\leq 100$.

$\because S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\leq\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 100=25\sqrt{3}$，……8分

$\therefore$当且仅当$b=c$时，$\triangle ABC$面积有最大值，最大值为$25\sqrt{3}$.……10分

18.解析：（1）因为$\dfrac{a_{n+1}+a_n+2}{a_na_{n+1}+a_{n+1}}=-2$，所以$a_na_{n+1}=-\dfrac{3}{2}a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n-1$，

则$\dfrac{1}{a_{n+1}+1}-\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}+a_n+a_{n+1}+1}=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}a_{n+1}}=2$，

所以$b_{n+1}-b_n=2$，……2分

又$a_1=0$，所以$b_1=\dfrac{1}{a_1+1}=1$，故数列$\{b_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列，

所以$b_n=1+2(n-1)=2n-1$，……5分

$a_n=\dfrac{1}{b_n}-1=\dfrac{1}{2n-1}-1=\dfrac{2-2n}{2n-1}$.……6分

（2）证明：**（方法一）**由（1）可得$S_n=n^2$，所以$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{n^2}$.

当$n=1$时，$T_1=\dfrac{1}{S_1}=1<\dfrac{7}{4}$.……………………………………………………………7 分

当$n\geq 2$时，$\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，……………………………………………8 分

$T_n=\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}$

$<1+\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n}\right)+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

$=1+\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)<\dfrac{7}{4}$.…………………………………11 分

综上可得$T_n<\dfrac{7}{4}$.……………………………………………………………………12 分

（方法二）由（1）可得$S_n=n^2$，所以$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{n^2}$.

当$n=1$时，$T_1=\dfrac{1}{S_1}=1<\dfrac{7}{4}$.……………………………………………………………7 分

当$n=2$时，$T_2=\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}<\dfrac{7}{4}$.……………………………………………8 分

当$n\geq 3$时，$\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$，……………………………………………………9 分

$T_n=\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}$

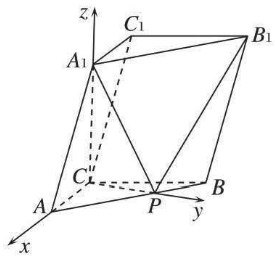
$<1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{7}{4}$.…………………………………11 分

综上可得$T_n<\dfrac{7}{4}$.……………………………………………………………………12 分

19.解析：(1)证明：如图，连接A_1C，在ΔA_1AC中，$A_1A=2$，$AC=1$，$\angle A_1AC=60^\circ$，

由余弦定理，得

$A_1C^2=AA_1^2+AC^2-2AA_1\cdot AC\cdot\cos\angle A_1AC=4+1-2\times2\times1\times\frac{1}{2}=3$，



所以 $A_1C=\sqrt{3}$，所以 $A_1C^2+AC^2=A_1A^2$，

所以 $A_1C\perp AC$， ……………………………………………2 分

同理 $A_1C\perp BC$，又 $BC\cap AC=C$， $AC,BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $A_1C\perp$ 平面 ABC，又 $A_1C\subset$ 平面 A_1ACC_1，

所以平面 $ABC\perp$ 平面 A_1ACC_1. ……………………………………………5 分

(2) 由平面几何知识可知，AC⊥CP， ……………………………………………6 分

以 C 为坐标原点，以 CA，CP，CA_1 为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$，

则 $A(1,0,0)$，$B(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$， ……………………………………………7 分

所以 $\overrightarrow{AA_1}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$

设平面 A_1AB 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-x_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=1$，得 $\vec{m}=(\sqrt{3},3,1)$. ……………………………………………9 分

又平面 CA_1P 的法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$， ……………………………………………10 分

$\therefore\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+9+1}}=\frac{\sqrt{39}}{13}$ ……………………………………………11 分

所以二面角 $C-A_1P-B_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{130}}{13}$. ……………………………………………12 分

（若用综合几何法求解，请按照步骤酌情给分）

20.解析：(1)∵前四组频数成等差数列，

$\therefore$ 设 $a=0.2+d$，$b=0.2+2d$，$c=0.2+3d$，

$\therefore 0.5\times(0.2+0.2+d+0.2+2d+0.2+3d+0.2+d+0.1+0.1+0.1)=1$，

解得 $d=0.1$，$\therefore a=0.3$，$b=0.4$，$c=0.5$.

居民月用水量在 2～2.5 内的频率为 $0.5\times0.5=0.25$. ……………………………4 分

(2)由题图及(1)可知，居民月用水量小于等于 2.5 的频率为 0.7<0.8，

$\therefore$ 为使 80%以上居民月用水价格为 4 元/立方米，

应规定 $w=2.5+\frac{0.8-0.7}{0.15}\approx2.83$ ……………………………………………8 分

(3)将频率视为概率，设 A(单位：立方米)代表居民月用水量，

可知$P(A\leqslant 2.5)=0.7$，

由题意，知$X\sim B(3，0.7)$，

$P(X=0)=C_3^0\times 0.3^3=0.027$，

$P(X=1)=C_3^1\times 0.7\times 0.3^2=0.189$，

$P(X=2)=C_3^2\times 0.7^2\times 0.3=0.441$，

$P(X=3)=C_3^3\times 0.7^3=0.343$.

$\therefore X$的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.441	0.343

………11分

$\because X\sim B(3，0.7)$，$\therefore E(X)=3\times 0.7=2.1$.………………………………………………12分

21.解析：（1）设$P(x,y)$，则$y_Q=-\dfrac{b}{a}x$，$x_R=-\dfrac{a}{b}y$，

由题意可得，$|\dfrac{1}{2}x\bullet(-\dfrac{b}{a}x)|+|\dfrac{1}{2}y\bullet(-\dfrac{a}{b}y)|=\dfrac{ab}{2}$，即$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

故点P的轨迹C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$； ……………4分

（2）由（1）可知C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

假设存在常数n，使$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}=\lambda$（常数），设直线$l$：$x=my+n$，代入C，整理得

$(m^2+4)y^2+2mny+(n^2-4)=0$，设$D(x_1,y_1),E(x_2,y_2)$

则$y_1+y_2=-\dfrac{2mn}{m^2+4},y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{m^2+4}$ ……………6分

所以$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}=(x_1+4,y_1)\bullet(x_2+4,y_2)$

$=(x_1+4)(x_2+4)+y_1y_2=(my_1+n+4)(my_2+n+4)+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+m(n+4)(y_1+y_2)+(n+4)^2$ ……………7分

$=\dfrac{(m^2+1)(n^2-4)}{m^2+4}-\dfrac{2m^2n(n+4)}{m^2+4}+(n+4)^2=\lambda$

（算法一）

整理化简得：$(12-\lambda)m^2+5n^2+32n+60-4\lambda=0$对$\forall m\in R$恒成立.……9分

故$12-\lambda=0,5n^2+32n+60-4\lambda=0$

$\therefore\lambda=12,5n^2+32n+12=0\therefore n=-\dfrac{2}{5}$或$-6$(舍去) ……………11分

当直线l为 x 轴时$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}=12$

综上，存在常数$n=-\dfrac{2}{5}$，对任意直线l，使$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}=12$（为定值） ……………12 分

（算法二）

$$=\frac{(m^2+1)(n^2-4)}{m^2+4}-\frac{2m^2n(n+4)}{m^2+4}+(n+4)^2=\frac{(-n^2-8n-4)m^2+(n^2-4)}{m^2+4}+(n+4)^2=\lambda$$

根据对应系数成比例得：$-n^2-8n-4=\dfrac{n^2-4}{4}$. ……………9 分

整理得$5n^2+32n+12=0$，解得$n=-\dfrac{2}{5}$或$n=-6$

当$n=-6$不能保证任意l成立，故舍去.

将$n=-\dfrac{2}{5}$代入上式可得$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}=12$ ……………11 分

当直线l为 x 轴时$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}=12$

综上，存在常数$n=-\dfrac{2}{5}$，对任意直线l，使$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AE}=12$（为定值） ……………12 分

22.解析：（1）依题意知：$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=a\ln x+a$，

$g'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x}(a-\dfrac{1}{x})$ ……………………1 分

①$a\le 0$时，$g'(x)<0$恒成立，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减； ……………………3 分

②$a>0$时，由$g'(x)<0$，得$0<x<\dfrac{1}{a}$，$g'(x)>0$，得$x>\dfrac{1}{a}$，

$g(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$上单调递减，$(\dfrac{1}{a},+\infty)$上单调递增. ……………………5 分

（2）依题意，要证：$x\ln x<e^x+\sin x-1$，

①当$0<x\le 1$时，$x\ln x\le 0, e^x-1+\sin x>0$，故原不等式成立，……………………………7 分

②当$x>1$时，要证：$x\ln x<e^x+\sin x-1$，

即要证：$x\ln x-e^x-\sin x+1<0$，

令$h(x)=x\ln x-e^x-\sin x+1,(x>1)$则$h'(x)=\ln x-e^x-\cos x+1$，

$h''(x)=\dfrac{1}{x}-e^x+\sin x$， ………………………………8 分

$\because x>1,\therefore h''(x)<0$ ………………………………9 分

$\therefore h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减 $\therefore h'(x)<h'(1)=1-e-\cos 1<0$ ……………………10 分

$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，$\therefore h(x)<h(1)=1-e-\sin 1<0$，

即：$x\ln x-e^{x}-\sin x+1<0$，故原不等式成立. ……………………………12 分