# 大联考雅礼中学2024届高三月考试卷(四)

## 数学参考答案

一、二、选择题

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | B | D | B | D | A | C | D | BCD | ACD | ABD | ABD |

1. B 【解析】因为 $x^2\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$，即 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，所以 $A\cap B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$. 故选：B.

2. B 【解析】由题意，化简得 $z=\dfrac{2-4\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=\dfrac{2-4\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}+4}{2}=2+\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=2-\mathrm{i}$，所以复数 $\bar{z}$ 的虚部为 $-1$. 故选：B.

3. D 【解析】由题意，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+1(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$，解下第 4 个圆环，则 $n=4$，即 $a_4=a_3+2a_2+1$，而 $a_3=a_2+2a_1+1=1+2+1=4$，则 $a_4=4+2+1=7$，故选：D.

4. B 【解析】由题设 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r x^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=(-1)^r\mathrm{C}_6^r x^{6-2r}$，所以含 $x^4$ 项为 $T_2=(-1)^1\mathrm{C}_6^1x^4=-6x^4$，含 $x^6$ 项为 $T_1=(-1)^0\mathrm{C}_6^0x^6=x^6$，则 $x^4$ 的系数与 $x^6$ 的系数之比为 $-6$，故选：B.

5. D 【解析】根据题意，对于函数 $f(x)=\dfrac{x(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x)}{2+\cos x}$，有函数 $f(-x)=\dfrac{-x(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{2+\cos x}=-\dfrac{x(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x)}{2+\cos x}=-f(x)$，

即函数 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，故排除 A，B；

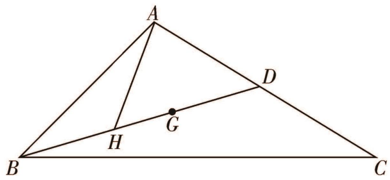
当 $x>0$ 时，$\cos x\in[-1,1]$，则恒有 $f(x)=\dfrac{x(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x)}{2+\cos x}>0$，排除 C；故选：D.

6. A 【解析】因为 $f(1+x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(2-x)=f(x)$，又由 $f(4+x)+f(-x)=0$，得 $f(4+x)=-f(-x)$，所以 $f(8+x)=-f(-4-x)=-f(6+x)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(2023)=f(3)=-f(1)=-1$. 故选：A.

7. C 【解析】设 $G(x,y)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，

因为 $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\mathbf{0}$，所以 $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$，所以点 $G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

设点 $D$ 是 $AC$ 的中点，则 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，$B$，$G$，$D$ 共线，如图，




又 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AD}$. 因为 $B$，$H$，$D$ 三点共线，所以 $x+2y=1$，

所以 $x^2+4y^2=x^2+(2y)^2\geqslant\dfrac{(x+2y)^2}{2}=\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $x=2y$，

即 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{4}$ 时取等号，即 $x^2+4y^2$ 的最小值是 $\dfrac{1}{2}$. 故选：C.

8. D 【解析】令 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1(x>0)$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f(x)>f(0)=0$，即 $\mathrm{e}^x>x+1$，$\therefore \mathrm{e}^{0.1}>1.1$，

$\therefore \mathrm{e}^{0.05}>\sqrt{1.1}$，即 $a>c$；

令 $g(x)=\ln x-x+1$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$；

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore g(x)\leqslant g(1)=0$，

$\therefore \ln x\leqslant x-1$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），$\therefore \ln\sqrt{x}\leqslant\sqrt{x}-1$，

即 $\dfrac{\ln x}{2}+1\leqslant\sqrt{x}$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），$\therefore \dfrac{\ln 1.1}{2}+1<\sqrt{1.1}$，即 $b<c$；

综上所述：$a>c>b$. 故选：D.

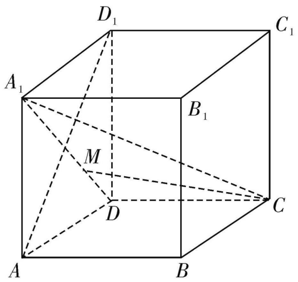
9. BCD 【解析】对 A，由方差的性质可知，若随机变量 $\xi,\eta$ 满足 $\eta=2\xi+1$，则 $D(\eta)=2^2\times D(\xi)=4D(\xi)$，故 A 错误；对 B，根据正态分布的图象对称性可得 $P(3<\xi<6)=P(\xi<6)-0.5=0.34$，故 B 正确；对 C，根据经验回归直线过样本中心点可知 C 正确；对 D，由 $\chi^2=4.712>3.841$ 可判断 $X$ 与 $Y$ 有关，故 D 正确，故选：BCD.

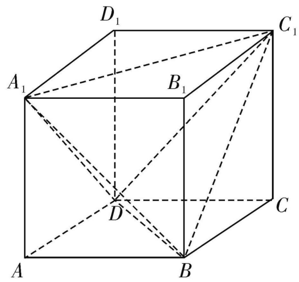
10. ACD 【解析】因为 $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+4x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，故 A 正确；当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{12}\right]$ 时，$4x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right]$，函数 $f(x)=2\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{12}\right]$ 上先增后减，故 B 不正确；令

$2\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=0$，得 $4x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，故 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$，因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $k=0,1,2,3$，故 C 正确；把 $f(x)=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到 $y=2\cos\left[4\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 4x$ 的图象，当 $x=-\frac{\pi}{8}$时，$y$ 取得最小值$-2$，故 D 正确. 故选：ACD.

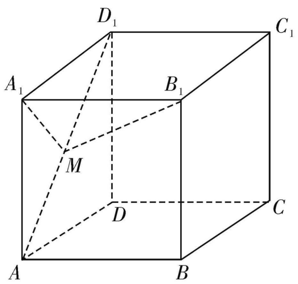
11. ABD 【解析】易知抛物线方程为 $y^2=4x$，准线方程为 $x=-1$，故 A 正确；由条件有：$x_A+x_B+x_C=3x_F=3$，$2|\overrightarrow{FB}|=2x_B+2$，$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FC}|=x_A+x_C+2$，由 $x_B=1\Rightarrow x_A+x_C=2$，故 B 正确；由抛物线的焦点弦性质可得 $y_1y_2=-4$，故 C 错误；由题可知，$|AF|+|CF|\geqslant|AC|=6$，当且仅当 $A,C,F$ 三点共线时，等号成立，由抛物线的定义可知，$|AF|+|CF|=x_1+x_2+p=x_1+x_2+2$，所以 $x_1+x_2+2\geqslant 6$，即 $x_1+x_2\geqslant 4$，所以 $AC$ 的中点到 $y$ 轴距离为$\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\frac{4}{2}=2$，故 D 正确. 故选：ABD.

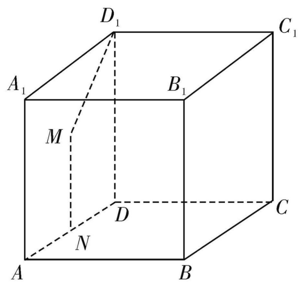
12. ABD 【解析】连接 $AD_1, A_1D, MC, A_1C$，
由正方体的性质可得 $AD_1\perp A_1D, AD_1\perp DC, A_1D\cap DC=D$，
则 $AD_1\perp$平面 $A_1DC$，当点 $M\in A_1D$ 上时，有 $CM\perp AD_1$，
故点 $M$ 存在无数个位置满足 $CM\perp AD_1$，故 A 正确；




由已知 $V_{B\text{-}C_1MD}=V_{M\text{-}C_1BD}$，当点 $M$ 与点 $A_1$ 重合时，点 $M$ 到平面 $C_1BD$ 的距离最大，则三棱锥 $B-C_1MD$ 的体积最大值为 $V_{A_1\text{-}C_1BD}=1^3-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{3}$，故 B 正确；
连接 $A_1M$，因为 $CD\parallel A_1B_1$ 则$\angle A_1B_1M$ 为异面直线 $B_1M$ 与 $CD$ 所成的角，
设正方体棱长为 1，$A_1M=x$，则 $B_1M^2=x^2+1$，
点 $A_1$ 到线 $AD_1$ 的距离为$\frac{A_1A\cdot A_1D_1}{AD_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1$，
$\cos\angle A_1B_1M=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}\notin\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，
所以在线段 $AD_1$ 上不存在点 $M$，使异面直线 $B_1M$ 与 $CD$ 所成的角是 30°，故 C 错误；




连接 $MD_1$，过 $M$ 作 $MN\perp AD$ 交 $AD$ 于 $N$，由 $C_1D_1\perp$平面 $ADD_1A_1$，$MD_1\subset$平面 $ADD_1A_1$，得 $MD_1\perp D_1C_1$，则 $MD_1$ 为点 $M$ 到直线 $C_1D_1$ 的距离，$MN$ 为点 $M$ 到直线 $AD$ 的距离，若 $MD_1=MN$，则点 $M$ 在以 $D_1$ 为焦点，以 $AD$ 为准线的抛物线上，故这样的点 $M$ 有无数个，故 D 正确. 故选：ABD.

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. $\frac{8}{15}$ 【解析】易得：$\tan\alpha=-4\Rightarrow\tan 2\alpha=\frac{8}{15}$.

14. 60 【解析】5 个班去 $A,B,C,D$ 四个劳动教育基地进行社会实践，每个班去一个基地，每个基地至少安排一个班，如果是只有高一(1)班被安排到 $A$ 基地，那么总的排法是 $C_4^2A_3^3=36$ 种，如果是还有一个班和高一(1)班

一起被安排到 $A$ 基地，那么总的排法是 $C_4^1A_3^3=24$ 种，所以高一(1)班被安排到 $A$ 基地的排法总数为 $36+24=60$ 种.

15. $2\sqrt{3}$ 【解析】易得：$|PQ|^2=|CP|^2-4$，而 $|CP|\geqslant|CO|-1=5-1=4$，∴ $|PQ|\geqslant\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$.

16. $\dfrac{12}{5}$ 【解析】由 $|F_1F_2|=2c=10$，得 $c=5$. 因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a=6$，所以 $a=3$.

又因为 $c^2=a^2+b^2$，所以 $b=4$，故双曲线 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$，

所以两条渐近线的方程为 $y=\pm\dfrac{4}{3}x$. 设 $P(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{x_0^2}{9}-\dfrac{y_0^2}{16}=1$，故 $\dfrac{16x_0^2}{9}-y_0^2=16$.

不妨设 $d_1=\dfrac{\left|\dfrac{4}{3}x_0-y_0\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+1}}$，则 $d_2=\dfrac{\left|-\dfrac{4}{3}x_0-y_0\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+1}}$，

所以 $d_1d_2=\dfrac{\left|\dfrac{4}{3}x_0-y_0\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+1}}\times\dfrac{\left|\dfrac{4}{3}x_0+y_0\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+1}}=\dfrac{\left|\dfrac{16x_0^2}{9}-y_0^2\right|}{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+1}=\dfrac{144}{25}$，所以 $\sqrt{d_1d_2}=\dfrac{12}{5}$.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. 【解析】(1)设事件 $A$ 表示甲命中，事件 $B$ 表示乙命中，则 $P(A)=\dfrac{4}{5}$，$P(B)=\dfrac{3}{4}$，………………………… 1 分

∴1 局投篮比赛，甲、乙平局的概率为 $P(AB)+P(\bar{A}\bar{B})=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}+\left(1-\dfrac{4}{5}\right)\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{13}{20}$. ………………… 4 分

(2)1 局投篮比赛，甲获胜的概率为 $P(A\bar{B})=\dfrac{4}{5}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{5}$， ………………………………… 6 分

易知随机变量 $X=0,1,2,\cdots 10$，

易得 $P(X=k)=C_{10}^k\left(\dfrac{1}{5}\right)^k\left(1-\dfrac{1}{5}\right)^{10-k}(k=0,1,2,\cdots,10)$，………………………………… 8 分

∴随机变量 $X$ 服从二项分布，即 $X\sim B\left(10,\dfrac{1}{5}\right)$，

∴$E(X)=10\times\dfrac{1}{5}=2$. ……………………………………………………………………… 10 分

18. 【解析】(1)连接 $AC$，∵$DE\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$.

∴$DE\perp AC$. 又∵底面 $ABCD$ 是菱形，∴$AC\perp BD$， ………………………………………… 2 分

∵$BD\cap DE=D$，∴$AC\perp$ 平面 $BDE$，

设 $AC$，$BD$ 交于点 $O$，取 $BE$ 的中点 $G$，连接 $FG$，$OG$，

∴$OG$ 是△$BDE$ 的中位线，∴$OG\underline{\mathbin{/\!/}}\dfrac{1}{2}DE$，∵$CF/\!/DE$，$DE=2CF$，

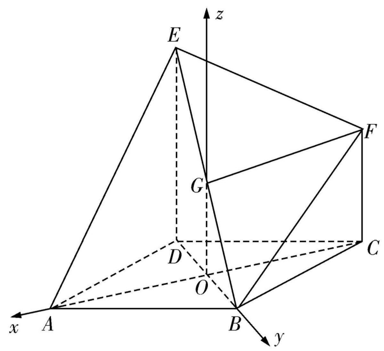
∴$OG/\!/CF$，$OG=CF$，∴四边形 $OCFG$ 是平行四边形，

∴$FG/\!/AC$，又 $AC\perp$ 平面 $BDE$， ……………………………………………………… 4 分

∴$FG\perp$ 平面 $BDE$，又因 $FG\subset$ 平面 $BEF$，

∴平面 $BEF\perp$ 平面 $BDE$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)以 $O$ 为坐标原点，$OA$，$OB$，$OG$ 所在直线分别为 $x$，$y$，$z$ 轴建立如图空间直角坐标系，




∵$BE$ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$，$\angle BAD=60°$，

∴$DE=BD=AB=2$，$OA=\sqrt{3}$，

∴$D(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$E(0,-1,2)$，$F(-\sqrt{3},0,1)$，

$\overrightarrow{BE}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{3},-1,1)$，$\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,0,2)$，

……………………………………………………………………… 8 分

设平面 $BEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}-2y+2z=0,\\-\sqrt{3}x-y+z=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$， ………………………… 9 分

设平面 $CDEF$ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+y_1=0,\\ z_1=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},0)$， …………………… 10 分

设二面角 $B-EF-D$ 的大小为 $\theta$，

$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

∴二面角 $B-EF-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. …………………… 12 分

19.【解析】(1)由题意，数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n=4n^2+kn$，

可得 $S_1=4+k$，$S_2=16+2k$，

因为 $a_2=20$，所以 $16+2k-(4+k)=20$，解得 $k=8$，

所以 $a_1=S_1=12$，$S_n=4n^2+8n$， …………………… 2 分

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=4(n-1)^2+8(n-1)$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=4n^2+8n-4(n-1)^2-8(n-1)=8n+4$， …………………… 4 分

当 $n=1$ 时，符合上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=8n+4$. …………………… 6 分

(2)由(1)知 $a_{n-1}=8n-4$，可得 $b_n-b_{n-1}=8n-4(n\geqslant2)$，

所以 $b_2-b_1=12$，$b_3-b_2=20$，$b_4-b_3=28$，…，$b_n-b_{n-1}=8n-4$， …………………… 8 分

所以 $b_n-b_1=12+20+28+\cdots+8n-4=\dfrac{(n-1)(12+8n-4)}{2}=4n^2-4$，

又由 $b_1=3$，可得 $b_n=4n^2-1(n\geqslant2)$，

当 $n=1$ 时，$b_1=3$，满足上式，所以 $b_n=4n^2-1$， …………………… 9 分

所以 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$， …………………… 10 分

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$. …………………… 12 分

20.【解析】(1)因为 $a+b=c\cos B+\sqrt{3}c\sin B$，所以 $\sin A+\sin B=\sin C\cos B+\sqrt{3}\sin C\sin B$， …………………… 1 分

又因为 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

所以 $\sin B+\sin B\cos C=\sqrt{3}\sin B\sin C$， …………………… 3 分

而 $B\in(0,\pi)$，$\sin B\neq0$，所以 $\sqrt{3}\sin C-\cos C=1$，即 $\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$， …………………… 4 分

又因为 $0<C<\pi$，所以 $-\dfrac{\pi}{6}<C-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，故 $C-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，解得 $C=\dfrac{\pi}{3}$. …………………… 6 分

(2)**法一**：因为 $AD=2BD$，所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$， …………………… 7 分

所以 $\overrightarrow{CD}^2=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{CA}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{CB}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，即 $b^2+4a^2+2ab=36$， …………………… 8 分

因为 $b^2+4a^2\geqslant4ab$，所以 $6ab\leqslant b^2+4a^2+2ab=36$，

解得 $ab\leqslant6$，当且仅当 $b=2a=2\sqrt{3}$ 时取“=”， …………………… 10 分

所以△$ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$， …………………… 11 分

当且仅当 $b=2a=2\sqrt{3}$ 时，△$ABC$ 的面积有最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. …………………… 12 分

**法二**：延长 $CD$ 至 $E$，使得 $CD=\dfrac{1}{2}DE$，

因为 $AD=2DB$，所以 $AE/\!/CB$，且 $AE=2CB=2a$， …………………… 7 分

$CE=3CD=6$，$\angle CAE=\angle CAB+\angle BAE=\angle CAB+\angle B=\pi-C=\dfrac{2\pi}{3}$，

由于 $CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle CAE$，所以 $b^2+4a^2+2ab=36$， …………………… 8 分

因为 $b^2+4a^2\geqslant4ab$，所以 $6ab\leqslant b^2+4a^2+2ab=36$，

解得 $ab\leqslant 6$，当且仅当 $b=2a=2\sqrt{3}$ 时取"="，…… 10 分

所以△ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，…… 11 分

当且仅当 $b=2a$ 时，△ABC 的面积有最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. …… 12 分

法三：由余弦定理也可得到.（略）

21.【解析】(1) 由题可得，$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$，所以 $a^2+b^2=5$，…… 1 分

椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

结合椭圆中 $b^2=a^2-c^2$，可知 $a=2,b=1$. …… 3 分

所以椭圆 $C$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …… 4 分

(2) $F_2(\sqrt{3},0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

因为直线 $PF_2$ 与直线 $QF_2$ 的倾斜角互补，

所以可知 $k_{PF_2}+k_{QF_2}=0$，即 $\frac{y_1}{x_1-\sqrt{3}}+\frac{y_2}{x_2-\sqrt{3}}=0$，①

化简得 $x_1y_2+x_2y_1-\sqrt{3}(y_1+y_2)=0$.

设直线 $PQ$: $x=my+n(n>2)$，将 $x_1=my_1+n$，$x_2=my_2+n$ 代入①式，

整理可得 $2my_1y_2+(n-\sqrt{3})(y_1+y_2)=0$. ② …… 6 分

且由 $\begin{cases}x=my+n,\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 消元化简可得 $(m^2+4)y^2+2mny+n^2-4=0$，

所以 $y_1+y_2=-\frac{2mn}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{n^2-4}{m^2+4}$，

代入②式由 $\frac{2m(n^2-4)}{m^2+4}-(n-\sqrt{3})\frac{2mn}{m^2+4}=0$，解得 $n=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. …… 8 分

所以直线 $PQ$: $x=my+\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

因为点 $F_2(\sqrt{3},0)$ 到直线 $PQ$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{3+3m^2}}$，

且 $|PQ|=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{4\sqrt{3m^2-4}}{\sqrt{3}(m^2+4)}$，

所以 $S_{\triangle PQF_2}=\frac{1}{2}d\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+3m^2}}\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{4\sqrt{3m^2-4}}{\sqrt{3}(m^2+4)}=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3m^2-4}}{m^2+4}$，…… 10 分

令 $t=\sqrt{3m^2-4}$，则 $m^2=\frac{t^2+4}{3}$，$S_{\triangle PQF_2}=\frac{2t}{t^2+16}\leqslant\frac{1}{4}$，

当且仅当 $t=4$，$m^2=\frac{20}{3}$ 时取等号，

所以△$PQF_2$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{4}$. …… 12 分

22.【解析】(1) 由题意，可得 $a=\frac{1+\ln x}{x}$，

转化为函数 $g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ 与直线 $y=a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同交点，…… 1 分

$g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}(x>0)$，

故当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$.

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，…… 3 分

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=1$.

又 $g\left(\frac{1}{e}\right)=0$，故当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时，$g(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$g(x)>0$.

可得 $a\in(0,1)$. ………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$,

由题可知 $x_1,x_2$ 是 $\ln x-ax+1=0$ 的两个根,

故 $\ln x_1-ax_1+1=0,\ln x_2-ax_2+1=0\Rightarrow a=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$. ………………………………… 6 分

要证 $f'(x_1\cdot x_2)<1-a$,只需证 $x_1\cdot x_2>1$, ……………………………………………………… 7 分

即证 $\ln x_1+\ln x_2>0$,即证 $(ax_1-1)+(ax_2-1)>0$,

即证 $a>\dfrac{2}{x_1+x_2}$,即证 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$. …………………………………………… 9 分

不妨设 $0<x_1<x_2$,故即证 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}$(*),

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0,1)$,$h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$, ……………………………………………… 10 分

$h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,

则 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,则 $h(t)<h(1)=0$,

故(*)式成立,即 $f'(x_1\cdot x_2)<1-a$ 成立. …………………………………………………………… 12 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。