湖北省部分重点中学 2024 届高三第二次联考

高三数学试卷参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	C	B	A	D	A	B	CD	BD	ABD	BCD

13.-20　14. $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$　15.$(-\frac{2}{3}, 4)$　16.4；$\frac{9}{4}$

17.解：（1）因为$b(\tan A+\tan B)=2c\tan B$，

所以$\sin B\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}\right)=\frac{2\sin C\sin B}{\cos B}$，

$\sin B(\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B})=\frac{2\sin C\sin B}{\cos B}$，

$\frac{\sin B\sin C}{\cos A\cos B}=\frac{2\sin C\sin B}{\cos B}$，

因为$\sin B>0$，$\sin C>0$，$\cos B\neq 0$，所以$\cos A=\frac{1}{2}$，又$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{3}$. ·········5 分

（2）因为BC边的中线长为 2，所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=4$，所以$c^2+b^2+2bc\cos A=16$，即

$b^2+c^2=16-bc\geq 2bc$，解得$bc\leq\frac{16}{3}$，当且仅当$b=c$时取等号.

所以$a^2=c^2+b^2-2bc\cos A=16-2bc\geq\frac{16}{3}$，$\therefore a\geq\frac{4\sqrt{3}}{3}$

所以a的最小值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ·········10 分

18.（1）由题意知：当$n=1$时，$a_1q=3a_1+2$ ①

当$n=2$时，$a_1q^2=3(a_1+a_1q)+2$ ②

联立①②，解得$a_1=2, q=4$. 所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2\times 4^{n-1}$. ·········4 分

（2）由（1）知$a_n=2\times 4^{n-1}$，

$a_{n+1}=2\times 4^n$

所以$a_{n+1}=a_n+(n+2-1)d$. 所以$d_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\frac{6\times 4^{n-1}}{n+1}$.

设数列$\{d_n\}$中存在 3 项d_m，d_k，d_p（其中m，k，p成等差数列）成等比数列.

则$d_k{}^2=d_m\cdot d_p$，　所以$(\frac{6\times 4^{k-1}}{k+1})^2=\frac{6\times 4^{m-1}}{m+1}\cdot\frac{6\times 4^{p-1}}{p+1}$，即$\frac{36\times 4^{2k-2}}{(k+1)^2}=\frac{36\times 4^{m+p-2}}{(m+1)(p+1)}$

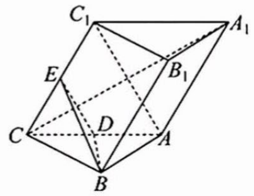
又因为m，k，p成等差数列，所以$2k=m+p$

所以$(k+1)^2=(m+1)(p+1)$化简得$k^2+2k=mp+m+p$　所以$k^2=mp$

又$2k=m+p$，所以$k=m=p$与已知矛盾.

所以在数列$\{d_n\}$中不存在 3 项d_m，d_k，d_p成等比数列. ·················12 分

19.（1） 证明：连接 AC_1 ∵四边形 CC_1A_1A 是菱形∴ $A_1C\perp AC_1$，



又 D，E 分别为 AC，CC_1 的中点

∴ $DE//AC_1$ ∴ $A_1C\perp DE$，

又∵ ΔABC 为等边三角形，D 为 AC 的中点∴ $BD\perp AC$

∴ 平面 ABC ⊥ 平面 CC_1A_1A，平面ABC ∩平面 $CC_1A_1A=AC$，$BD\subset$ 平面 ABC

∴ $BD\perp$ 平面 CC_1A_1A，又 $A_1C\subset$ 平面 CC_1A_1A，∴ $BD\perp A_1C$

又 $A_1C\perp DE$，$BD\cap DE=D$，$BD,DE\subset$ 平面 BDE

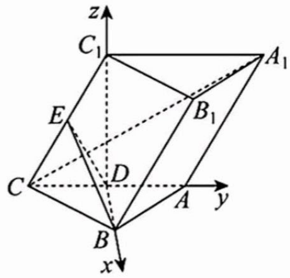
∴ $A_1C\perp$ 平面 BDE ………4 分

（2）∵ $AC=CC_1=6$，$\angle ACC_1=60^\circ$，∴ ΔC_1CA 为等边三角形

∴ D 是 AC 的中点，∴ $C_1D\perp AC$ 由（1）得 $BD\perp$ 平面 CC_1A_1A

∴ 以 D 为原点，DB,DA,DC_1 所在直线分别为x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$B(3\sqrt{3},0,0)$，$C_1(0,0,3\sqrt{3})$，$C(0,-3,0)$，$A_1(0,6,3\sqrt{3})$

$\overrightarrow{C_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$



∴ $P\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},3\sqrt{3}\right)$ ∴ $\overrightarrow{DB}=(3\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{DP}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},3\sqrt{3}\right)$

设平面 PBD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}3\sqrt{3}x=0\\\frac{3\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+3\sqrt{3}z=0\end{cases}$

取 $z=1$，则 $y=-2\sqrt{3}$.所以 $\vec{n}=(0,-2\sqrt{3},1)$ 是平面 PBD 的一个法向量

由（1）得 $\vec{m}=\overrightarrow{CA_1}=(0,9,3\sqrt{3})$ 是平面 BDE 的一个法向量

∴ $|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right|=\frac{15\sqrt{3}}{6\sqrt{3}\times\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$

即平面PBD与平面BDE的夹角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{13}}{26}$ ………12 分

20.解：（1）由题知，椭圆 C 的右焦点为 $F_2(1,0)$，且过点 $A(1,\frac{8}{3})$，

所以 $2a=\sqrt{2^2+(\frac{8}{3})^2}+\frac{8}{3}=6$，所以 $a=3$.又 $c=1$，所以 $b^2=8$，

所以C的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. ………4 分

（2）设直线PQ的方程为 $x=ty-1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases}x=ty-1\\\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\end{cases}$ 得 $(8t^2+9)y^2-16ty-64=0$

所以 $y_1+y_2=\frac{16t}{8t^2+9}$，$y_1y_2=\frac{-64}{8t^2+9}$，

直线DP的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$，令 $x=-4$ 得，$y_M=\frac{-y_1}{x_1+3}=\frac{-y_1}{ty_1+2}$

同理可得 $y_N=\frac{-y_2}{ty_2+2}$

所以$|MR|\cdot|NR| = |y_M y_N| = \left|\frac{y_1y_2}{(ty_1+2)(ty_2+2)}\right| = \left|\frac{y_1y_2}{t^2y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4}\right|$

$$= \left|\frac{-64}{-64t^2+32t^2+4(8t^2+9)}\right| = \frac{16}{9}$$

故$|MR|\cdot|NR|$为定值$\frac{16}{9}$ ·········12 分

21. 解：(1)X_2可能取0，1，2，3

则$P(X_2=0)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$;

$P(X_2=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$;

$P(X_2=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{32}{81}$;

$P(X_2=2)=1-P(X_2=0)-P(X_2=1)-P(X_2=3)=\frac{41}{81}$,

分布列为：

X_2	0	1	2	3
P	$\frac{4}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{41}{81}$	$\frac{4}{81}$

$E(X_2)=0\times\frac{4}{81}+1\times\frac{32}{81}+2\times\frac{41}{81}+3\times\frac{4}{81}=\frac{14}{9}$ ·········5 分

（3）由题可知$P(X_{n+1}=1)=P(X_n=0)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)P(X_n=1)+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}P(X_n=2)$

$$=P(X_n=0)+\frac{4}{9}P(X_n=1)+\frac{4}{9}P(X_n=2)$$

$P(X_{n+1}=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}P(X_n=1)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)P(X_n=2)+P(X_n=3)$

$$=\frac{4}{9}P(X_n=1)+\frac{4}{9}P(X_n=2)+P(X_n=3)$$

$P(X_{n+1}=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}P(X_n=2)=\frac{1}{9}P(X_n=2)$

又∵ $P(X_n=0)+P(X_n=1)+P(X_n=2)=1$

$E(X_{n+1})=1\times P(X_{n+1}=1)+2\times P(X_{n+1}=2)+3\times P(X_{n+1}=3)$

$$=P(X_n=0)+\frac{12}{9}P(X_n=1)+\frac{15}{9}P(X_n=2)+2P(X_n=3)$$

$E(X_{n+1})=1+\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{2}{3}P(X_n=2)+P(X_n=3)=1+\frac{1}{3}E(X_n)$

$\therefore E(X_{n+1})-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}(E(X_n)-\frac{3}{2})$（$n\geq 2$ 且 $n\in N^*$）

$\because E(X_2)-\frac{3}{2}=\frac{1}{18}$

$\therefore E(X_n)-\frac{3}{2}=\frac{1}{18}\times(\frac{1}{3})^{n-2}$

$\therefore E(X_n)=\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n+\frac{3}{2}$（$n\geq 2$ 且 $n\in N^*$） ·········12 分

22.解：（1）$F(x)=h(x)-(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})=\frac{ex}{e^x}-(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})$,则$F'(x)=\frac{1-x}{e^{x-1}}+\frac{1}{2}=\frac{2-2x+e^{x-1}}{2e^{x-1}}$

令$m(x)=2-2x+e^{x-1}(x>1)$,则$m'(x)=e^{x-1}-2$

$\therefore m(x)$在（1，$\ln2+1$）上单调递减,在$(\ln2+1,+\infty)$ 上单调递增.

$m(x)\geq m(\ln2+1)=2(1-\ln2)>0$

$\therefore F'(x)>0$, $F(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增。

$\therefore F(x)>F(1)=0$,即$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)>-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$成立。 ………4 分

（2）$f'(x)=\frac{(1-a)x-e\ln x}{x^2}$

$\because f(x)$有两个极值点x_1,x_2　　$\therefore\begin{cases}(1-a)x_1-e\ln x_1=0\\(1-a)x_2-e\ln x_2=0\end{cases}$ ①

要证$\frac{x_2}{x_1}>e^{3a}$成立，即证$\ln x_2-\ln x_1>3a$成立。

令$t_1=\ln x_1,t_2=\ln x_2(t_1<t_2)$,即证$t_2-t_1>3a$成立.

①式可化为$\begin{cases}(1-a)e^{t_1}-et_1=0\\(1-a)e^{t_2}-et_2=0\end{cases}$,则$\frac{et_1}{e^{t_1}}=\frac{et_2}{e^{t_2}}=1-a$

令$h(t)=\frac{et}{e^t}$,$h'(t)=\frac{1-t}{e^{t-1}}$,$\therefore h(t)$在（$-\infty,1$）上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减。

$h(1)=1$,要使$h(t)=1-a$有两个零点，则$0<t_1<1<t_2$,

当$t\in(0,1)$时，$\frac{et}{e^t}>t$,直线$y=t$与$y=1-a$交于（$t_1',1-a$）

$\therefore t_1<t_1'=1-a$

当$t\in(1,+\infty)$时，由（1）知$h(t)>-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$

而$y=1-a$与$y=-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$交于（$t_2',1-a$），则$1<t_2'<t_2$, $t_2'=2a+1$

$\therefore t_2-t_1>t_2'-t_1'=(2a+1)-(1-a)=3a$成立。

$\therefore\frac{x_2}{x_1}>e^{3a}$ ………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。