

2024 年全国高考·仿真模拟卷(五)

数 学

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡的相应位置。
3. 全部答案在答题卡上完成,答在本试题卷上无效。
4. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
5. 考试结束后,将本试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 $\frac{a+i}{1-3i}$ ($a \in \mathbb{R}$) 在复平面内对应的点在虚轴上,则 $a =$
 A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. -3
2. 已知非空集合 A, B 是全集 U 的真子集,且满足 $A \neq B, A \cap B = A$,则下列结论错误的是
 A. $\forall x \in A, x \in B$ B. $\exists x \in A, x \notin B$
 C. $\exists x \in B, x \notin A$ D. $\exists x \notin A, x \notin B$
3. 古希腊毕达哥拉斯学派深信任意数均可以用有理数表述,该学派成员希帕苏斯因发现无理数引起学派恐慌,被同伴扔进大海。若 $\sin \alpha$ 是有理数,则下列三角函数值一定不是无理数的是
 A. $\cos \alpha$ B. $\tan \alpha$
 C. $\sin 2\alpha$ D. $\cos 2\alpha$
4. 声音的强弱可以用声波的能流密度来计算,叫做声强。通常人耳能听到声音的最小声强为 $I_0 = 10^{-12}$ (瓦/平方米)。对于一个声音的声强 I ,用声强 I 与 I_0 比值的常用对数的 10 倍表示声强 I 的声强级,单位是“分贝”,即声强 I 的声强级是 $10 \lg \frac{I}{I_0}$ (分贝)。声音传播时,在某处听到的声强 I 与该处到声源的距离 s 的平方成反比,即 $I = \frac{k}{s^2}$ (k 为常数)。若在距离声源 15 米的地方,听到声音的声强级是 30 分贝,则能听到该声音(即声强不小于 I_0)的位置到声源的最大距离为
 A. 100 米 B. 150 米 C. 200 米 D. $150\sqrt{10}$ 米
5. 一个底面积为 $6\sqrt{3}$,高为 h 的正六棱柱挖去一个上、下底面分别在该棱柱上、下底面上的圆柱后,其表面积不变,记挖去的圆柱的体积为 V ,则
 A. 当 $h = \sqrt{3}$ 时, $V = 3\sqrt{3}\pi$ B. 当 $h = \frac{3}{2}$ 时, $V = \frac{9\pi}{4}$
 C. 当 $h = 1$ 时, $V = \sqrt{3}\pi$ D. h 的最大值为 2

座位号

考号

姓名

班级

学校

答 题 区
线 内 不 要 写 密 封

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若点 $P(2, 0)$ 到双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线的距离为 1, 则 C 的离心率为 _____.
14. $(x^2 - y - 1)^6$ 的展开式中, $x^2 y^2$ 的系数为 _____.
15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + a_5$, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 记 $A = \{a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$, 若 $4 \in A$, $6 \in A$, 则 S_n 的最小值为 _____.
16. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 及 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上各恰有一个零点, 则 ω 的取值范围是 _____.

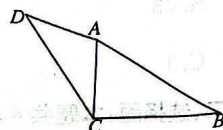
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程和解题步骤。

17. (本小题满分 10 分)

如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AC(1 + \cos \angle ACB) = AB \cos \angle BAC$.

(1) 若 $B = \frac{\pi}{6}$, 求 BC ;

(2) 若 $\cos D = \frac{7}{8}$, 且 $BC = CD = 2DA$, 求 $\tan B$.



18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{7}{2}$, 且 $\frac{2}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$.

(1) 求证: 数列 $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$ 是等比数列, 并求 $\frac{1}{a_n}$;

(2) 若 $b_n = \frac{n}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (本小题满分 12 分)

随着国民消费水平的提高, 人们越来越注重身材体态管理, 健身与瘦身成为不少人的追求. 现阶段网民健身瘦身消费的两个主要方式是购买健身器材与瘦身食品.

(1) 下表为 2018~2022 年中国健身器材市场规模(单位: 亿元):

年份	2018	2019	2020	2021	2022
市场规模	411	440	475	546	628

从这 5 年市场规模的数据中随机抽取 2 个, 求恰有 1 个大于 500 的概率;

(2) 鸡胸肉是中国瘦身网民最常购买的代餐食品之一, 现随机抽取若干瘦身网民进行调查, 其中青年、中年、老年人数之比为 $5:4:1$, 青年人中经常购买鸡胸肉的比例为 80% , 中年人中经常购买鸡胸肉的比例为 50% , 老年人中经常购买鸡胸肉的比例为 20% . 现从这部分瘦身网民中抽取一人, 若此人是经常购买鸡胸肉的, 求此人是中年人的概率;

【24 仿真模拟·数学(五) 第 3 页(共 4 页) X】

N

(3) 随机抽取 100 名中国瘦身网民, 统计他们每年愿意在瘦身上支出的金额(单位: 千元), 得出如下统计表:

金额范围	(0, 2]	(2, 4]	(4, 6]	(6, 8]	(8, 10]
频数	25	32	25	12	6

若中国瘦身网民每年愿意在瘦身上支出的金额 X 近似服从正态分布 $N(\mu, 2.33^2)$, 估计中国瘦身网民每年愿意在瘦身上支出的金额超过 8 500 元的概率.

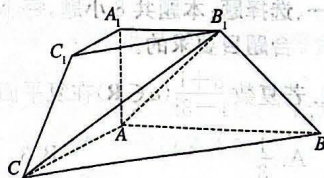
(参考数据: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$)

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, AB, AC, AA_1 两两垂直, $AA_1 = A_1B_1 = 1, BB_1 = \sqrt{2}$.

(1) 求证: 平面 $AB_1C \perp$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 若二面角 $A-B_1C-A_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 CB_1 的长.



21. (本小题满分 12 分)

已知点 A 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点, 点 F_1, F_2 分别为 C 的左、右焦点, 点 P 为 C 上的动点, $|PF_1| + |PF_2|$ 的最大值为 $2b^2$, $\triangle PAF_2$ 周长的最大值为 $8\sqrt{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 D 在 x 轴上, 直线 l (不与 x 轴重合) 过点 F_2 且与椭圆 C 交于两点 M, N , 点 E 是直线 DM 上的动点, 点 E 关于 x 轴的对称点恒在直线 DN 上, 求点 D 的坐标.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - 2ae^{-x} - (2a+1)x + a^2 (x > 0)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 证明: 存在 $a_0 \in (1, 2)$, 使得 $f(x_0) \geq -a_0^2 + a_0 + \frac{1}{2a_0}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

