2023～2024 学年度第一学期阶段联测

高三数学试题

考试时间 120 分钟　　总分 150 分

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 设集合 $A=\{x|x<3\}$，$B=\{x|(x-5)(x-2)\le 0\}$，则 $(\complement_{R}A)\cap B=$（　　）

A. $(-\infty,2]$　　B. $[3,5]$　　C. $[2,3]$　　D. $[3,5)$

【答案】B

【解析】

【分析】解一元二次不等式得集合 B，然后由集合的运算法则计算.

【详解】由题意 $B=\{x|2\le x\le 5\}$，$\complement_{R}A=\{x|x\ge 3\}$，

所以 $(\complement_{R}A)\cap B=\{x|3\le x\le 5\}$.

故选：B.

2. 若复数 $(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2$，则实数 $a=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】根据复数的乘法运算结合复数相等列式求解.

【详解】因为 $(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2a+(1-a^{2})\mathrm{i}=2$，

可得 $\begin{cases}2a=2\\1-a^{2}=0\end{cases}$，解得 $a=1$.

故选：C.

3. 已知实数 $a>0,b>1$ 满足 $a+b=5$，则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b-1}$ 的最小值为（　　）

A. $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{3+4\sqrt{2}}{4}$　　C. $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{6}$　　D. $\dfrac{3+4\sqrt{2}}{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】

所求 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b-1}$ 的分母特征，利用 $a+b=5$ 变形构造 $a+(b-1)=4$，再等价变形 $\frac{1}{4}(\frac{2}{a}+\frac{1}{b-1})[a+(b-1)]$，利用基本不等式求最值.

【详解】解：因为 $a>0, b>1$ 满足 $a+b=5$，

则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b-1}=(\frac{2}{a}+\frac{1}{b-1})\left[a+(b-1)\right]\times\frac{1}{4}$

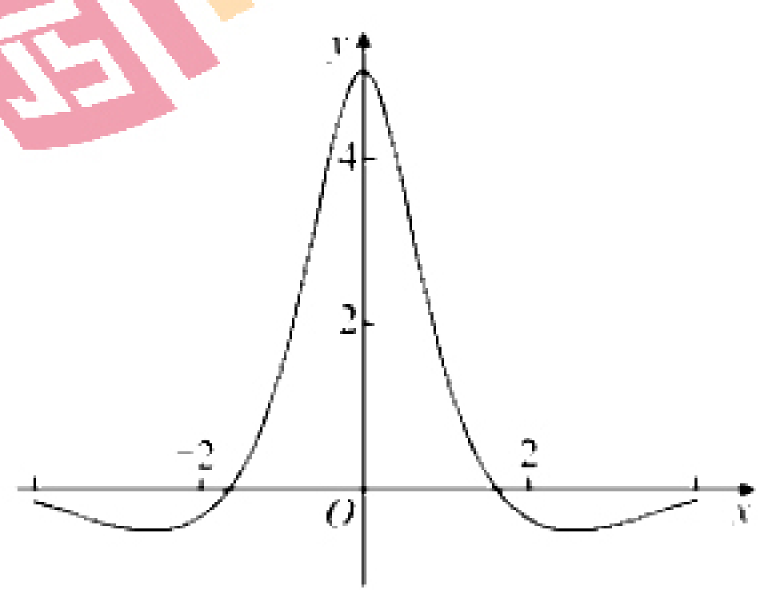
$=\frac{1}{4}\left[3+\frac{2(b-1)}{a}+\frac{a}{b-1}\right]\geq\frac{1}{4}(3+2\sqrt{2})$，

当且仅当 $\frac{2(b-1)}{a}=\frac{a}{b-1}$ 时取等号，

故选：A．

【点睛】本题考查通过拼凑法利用基本不等式求最值.拼凑法的实质在于代数式的灵活变形，拼系数、凑常数是关键.(1)拼凑的技巧，以整式为基础，注意利用系数的变化以及等式中常数的调整，做到等价变形;(2)代数式的变形以拼凑出和或积的定值为目标(3)拆项、添项应注意检验利用基本不等式的前提.

4. 函数 $f(x)$ 的图象如下图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　　）



A. $\frac{5\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{x^{2}+2}$　　B. $\frac{5\sin x}{x^{2}+1}$

C. $\frac{5\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{x^{2}+2}$　　D. $\frac{5\cos x}{x^{2}+1}$

【答案】D

【解析】

【分析】由图知函数为偶函数，应用排除，先判断 B 中函数的奇偶性，再判断 A、C 中函数在 $(0,+\infty)$ 上的函数符号排除选项，即得答案.

【详解】由图知：函数图象关于 y 轴对称，其为偶函数，且 $f(-2)=f(2)<0$，

由$\frac{5\sin(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{5\sin x}{x^2+1}$且定义域为R，即B中函数为奇函数，排除；

当$x>0$时$\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}>0$、$\frac{5(e^x+e^{-x})}{x^2+2}>0$，即A、C中$(0,+\infty)$上函数值为正，排除；

故选：D

5. 若$\tan\theta=-2$，则$\frac{\sin\theta(1+\sin2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　　）

A. $-\frac{6}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{6}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】将式子先利用二倍角公式和平方关系配方化简，然后增添分母($1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$)，进行齐次化处理，化为正切的表达式，代入$\tan\theta=-2$即可得到结果．

【详解】将式子进行齐次化处理得：

$$\frac{\sin\theta(1+\sin2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{4-2}{1+4}=\frac{2}{5}.$$

故选：C．

【点睛】易错点睛：本题如果利用$\tan\theta=-2$，求出$\sin\theta,\cos\theta$的值，可能还需要分象限讨论其正负，通过齐次化处理，可以避开了这一讨论．

6. 已知数列$\{a_n\}$满$a_n=n^2+\lambda n$（$n\in N^*$），且对任意$n\in N^*$，$a_n<a_{n+1}$恒成立，则实数λ的取值范围为（　　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $[-2,+\infty)$　　D. $(-3,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据数列单调性结合二次函数的性质分析求解.

【详解】由题意可知：$a_1<a_2<a_3<\cdots$，且$y=x^2+\lambda x$开口向上，对称轴为$x=-\frac{\lambda}{2}$，

可得$-\frac{\lambda}{2}<\frac{3}{2}$，解得$\lambda>-3$，

所以实数λ的取值范围为$(-3,+\infty)$.

故选：D.

7. 已知$a=6^{\ln 5}$，$b=7^{\ln 4}$，$c=8^{\ln 3}$，则（　　）

A. $a>b>c$

B. $a>c>b$

C. $b>c>a$

D. $c>b>a$

【答案】A

【解析】

【分析】对a,b,c两边取对数，得到$\ln a=\ln 5\cdot\ln 6$，$\ln b=\ln 4\cdot\ln 7$，$\ln c=\ln 3\cdot\ln 8$，构造$f(x)=\ln x\cdot\ln(11-x)$，$3\le x\le 5$，求导后再令$g(x)=x\ln x$，研究其单调性，得到$f(x)=\ln x\cdot\ln(11-x)$在$3\le x\le 5$上单调递增，从而得到$\ln c<\ln b<\ln a$，结合$y=\ln x$在$(0,+\infty)$上的单调性求出答案.

【详解】$a=6^{\ln 5}$，$b=7^{\ln 4}$，$c=8^{\ln 3}$两边取对数得：$\ln a=\ln 5\cdot\ln 6$，$\ln b=\ln 4\cdot\ln 7$，$\ln c=\ln 3\cdot\ln 8$，

令$f(x)=\ln x\cdot\ln(11-x)$，$3\le x\le 5$，

则$f'(x)=\frac{1}{x}\ln(11-x)-\frac{\ln x}{11-x}=\frac{(11-x)\ln(11-x)-x\ln x}{x(11-x)}$，

令$g(x)=x\ln x$，$3\le x\le 5$，

则$g'(x)=1+\ln x>0$在$3\le x\le 5$上恒成立，

所以$g(x)=x\ln x$在$3\le x\le 5$上为增函数，

因为当$3\le x\le 5$时，$11-x>x$恒成立，

所以$(11-x)\ln(11-x)-x\ln x>0$在$3\le x\le 5$上恒成立，

故$f'(x)=\frac{(11-x)\ln(11-x)-x\ln x}{x(11-x)}>0$在$3\le x\le 5$上恒成立，

故$f(x)=\ln x\cdot\ln(11-x)$在$3\le x\le 5$上单调递增，

所以$f(3)<f(4)<f(5)$，故$\ln 3\cdot\ln 8<\ln 4\cdot\ln 7<\ln 5\cdot\ln 6$，

即$\ln c<\ln b<\ln a$，

因为 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $c<b<a$.

故选：A

【点睛】构造函数比较大小是高考热点和难点，结合代数式的特点，选择适当的函数，通过导函数研究出函数的单调性，从而比较出代数式的大小，本题中，对 $a=6^{\ln 5}$，$b=7^{\ln 4}$，$c=8^{\ln 3}$ 两边取对数得：

$\ln a=\ln 5\cdot\ln 6$，$\ln b=\ln 4\cdot\ln 7$，前后两个对数中真数之和为 11，从而达到构造出适当函数的目的.

8. 已知函数 $f(x)=(x+1)e^x$，若函数 $F(x)=f^2(x)-mf(x)+m-1$ 有三个不同的零点，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $(-\frac{1}{e^2},0)$　　B. $(-\frac{1}{e^2},1)$

C. $(1-\frac{1}{e^2},1)$　　D. $(1-\frac{1}{e^2},1)\cup(1,+\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】把函数 $F(x)$ 有 3 个不同零点问题转化成方程 $f(x)=m-1$ 有两个不同解，再利用导数结合函数图象求解作答.

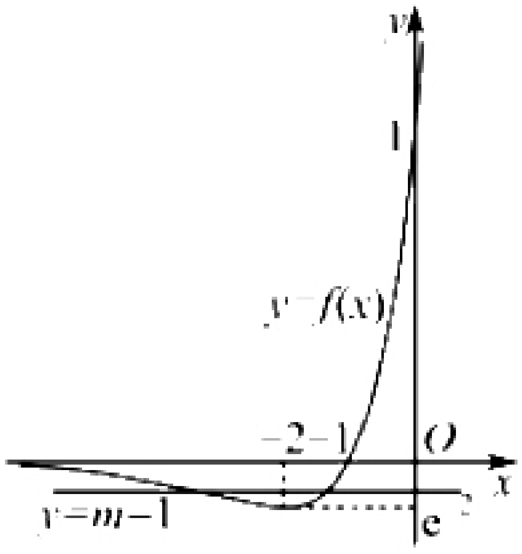
【详解】函数 $f(x)=(x+1)e^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求导得 $f'(x)=(x+2)e^x$，当 $x<-2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>-2$ 时，$f'(x)>0$，

因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(-2)=-\frac{1}{e^2}$，且 $x<-1$，恒有 $f(x)<0$，

由 $F(x)=0$，得 $[f(x)-1][f(x)-m+1]=0$，即 $f(x)=1$ 或 $f(x)=m-1$，由 $f(x)=1$，得 $x=0$，

于是函数 $F(x)$ 有 3 个不同零点，当且仅当方程 $f(x)=m-1$ 有 2 个不同的解，即直线 $y=m-1$ 与 $y=f(x)$ 图象有 2 个公共点，

在同一坐标系内作出直线 $y=m-1$ 与 $y=f(x)$ 的图象，如图，



观察图象知，当 $-\dfrac{1}{e^2}<m-1<0$，即 $1-\dfrac{1}{e^2}<m<1$ 时，直线 $y=m-1$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 2 个公共点，

所以实数 m 的取值范围为 $(1-\dfrac{1}{e^2},1)$.

故选：C

【点睛】思路点睛：涉及给定函数零点个数求参数范围问题，可以通过分离参数，等价转化为直线与函数图象交点个数，数形结合推理作答.

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20 分.在每小题有多项符合题目要求）

9. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$　　　　B. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}>0$

C. 若 $c=6$，则 $\triangle ABC$ 的面积是 15　　　　D. 若 $b+c=8$，则 $\triangle ABC$ 外接圆半径是 $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】先利用已知条件设 $b+c=4k,c+a=5k,a+b=6k$，进而得到 $a=3.5k,b=2.5,c=1.5k$，利用正弦定理可判定选项 A；利用向量的数量积公式可判断选项 B；利用余弦定理和三角形的面积公式可判定选项 C；利用余弦定理和正弦定理可判断选项 D.

【详解】依题意，设 $b+c=4k,c+a=5k,a+b=6k$，

所以 $a=3.5k,b=2.5k,c=1.5k$，

由正弦定理得：$sinA:sinB:sinC=a:b:c=7:5:3$，故选项 A 正确；

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=bc\cos A=bc\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=\frac{2.5^2+1.5^2-3.5^2}{2}k^2=-\frac{15}{8}k^2<0,$$

故 $\overline{CA}\cdot\overline{AB}=-\overline{AC}\cdot\overline{AB}>0$，选项 B 正确；

若$c=6$，则$k=4$，所以$a=14,b=10$，所以$\cos A=\dfrac{10^2+6^2-14^2}{2\times10\times6}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故$\triangle ABC$的面积是：$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times6\times10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$，故选项C不正确；

若$b+c=8$，则$k=2$，所以$a=7,b=5,c=3$，所以$\cos A=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则利用正弦定理得：$\triangle ABC$的外接圆半径是：$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，

故选项D正确.

故选：ABD

10. 设正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$，则（　　）

A. a_2a_9的最大值为10

B. a_2+a_9的最大值为$2\sqrt{10}$

C. $\dfrac{1}{a_2^2}+\dfrac{1}{a_9^2}$的最大值为$\dfrac{1}{5}$

D. $a_2^4+a_9^4$的最小值为200

【答案】ABD

【解析】

【分析】

根据等差数列的性质，求得a_2,a_9的关系式，由此结合基本不等式，判断出正确选项.

【详解】因为正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$，

所以$(a_2+a_9)^2=2a_2a_9+20$，

即$a_2^2+a_9^2=20$.

①$a_2a_9\le\dfrac{a_2^2+a_9^2}{2}=\dfrac{20}{2}=10$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时成立，故A选项正确.

②由于$\left(\dfrac{a_2+a_9}{2}\right)^2\le\dfrac{a_2^2+a_9^2}{2}=10$，所以$\dfrac{a_2+a_9}{2}\le\sqrt{10},a_2+a_9\le2\sqrt{10}$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时成立，

故B选项正确.

③$\dfrac{1}{a_2^2}+\dfrac{1}{a_9^2}=\dfrac{a_2^2+a_9^2}{a_2^2\cdot a_9^2}=\dfrac{20}{a_2^2\cdot a_9^2}\ge\dfrac{20}{\left(\dfrac{a_2^2+a_9^2}{2}\right)^2}=\dfrac{20}{10^2}=\dfrac{1}{5}$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时成立，

所以$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$的最小值为$\frac{1}{5}$，故C选项错误.

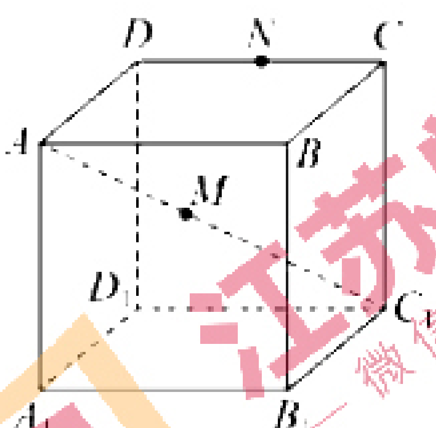
④结合①的结论，有$a_2^4+a_9^4=\left(a_2^2+a_9^2\right)^2-2a_2^2\cdot a_9^2=400-2a_2^2\cdot a_9^2\geq 400-2\times 10^2=200$，

当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时成立，故D选项正确.

故选：ABD

【点睛】本小题主要考查等差数列的性质，考查基本不等式求最值，属于中档题.

11. 如图，棱长为6的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M、N满足$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{CN}=\mu\overrightarrow{CD}$，其中$\lambda$、$\mu\in(0,1)$，点$P$是正方体表面上一动点，下列说法正确的是（　　）



A. 当$\lambda=\frac{1}{3}$时，DM // 平面CB_1D_1

B. 当$\mu=\frac{1}{2}$时，若B_1P // 平面A_1NC_1，则$|B_1P|$的最大值为$3\sqrt{5}$

C. 当$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$时，若$PM\perp D_1N$，则点P的轨迹长度为$12+6\sqrt{5}$

D. 过A、M、N三点作正方体的截面，截面图形可以为矩形

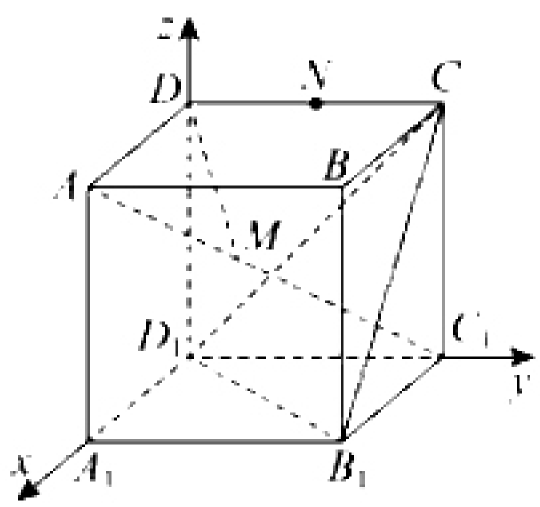
【答案】ABC

【解析】

【分析】以点D_1为原点，D_1A_1、D_1C_1、D_1D所在直线分别为x、y、z轴建立如下图所示的空间直角坐标系，利用空间向量法可判断AC选项；分别取AB、BC中点G、H，连接B_1G、GH、B_1H、A_1C_1、GN，，找出点P的轨迹，结合图形求出$|B_1P|$的最大值，可判断B选项；作出截面，分析截面的形状，可判断D选项.

【详解】以点D_1为原点，D_1A_1、D_1C_1、D_1D所在直线分别为x、y、z轴建立如下图所示的空间直角坐标系，

则$D_1(0,0,0)$、$B_1(6,6,0)$、$C(0,6,6)$、$A(6,0,6)$、$D(0,0,6)$、$C_1(0,6,0)$，



对于A选项：当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，则 $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AD}=(4,2,-2)$，

因为 $\overrightarrow{D_1B_1}=(6,6,0)$，$\overrightarrow{D_1C}=(0,6,6)$，

设平面 CB_1D_1 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=6x_1+6y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{D_1C}=6y_1+6z_1=0\end{cases}$，

取 $y_1=-1$，则 $x_1=z_1=1$，可得 $\vec{m}=(1,-1,1)$，

所以 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{DM}=4-2-2=0$，则 $\vec{m}\perp\overrightarrow{DM}$，

因为 $DM\not\subset$ 平面 CB_1D_1，所以当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，DM // 平面 CB_1D_1，故A正确；

对于B选项：当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，N 为 CD 中点，

分别取 AB、BC 中点 G、H，连接 B_1G、GH、B_1H、A_1C_1、GN，

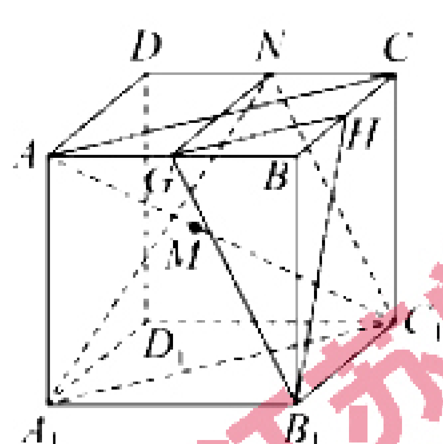
因为 G、H 分别为 AB、BC 的中点，所以 GH // AC，

又因为 AA_1 // CC_1 且 $AA_1=CC_1$，则四边形 AA_1C_1C 为平行四边形，可得 AC // A_1C_1，

所以 GH // A_1C_1，

且 $GH\not\subset$ 平面 A_1NC_1，$A_1C_1\subset$ 平面 A_1NC_1，所以 GH // 平面 A_1NC_1，

同理可得，B_1G // 平面 A_1NC_1，



因为 $B_1G\cap GH=G$，B_1G、$GH\subset$ 平面 B_1GH，所以平面 B_1GH // 平面 A_1NC_1，

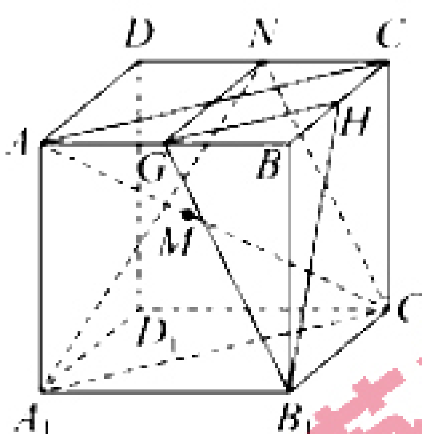
当点 P 为 $\triangle B_1GH$ 的边上一点（异于点 B_1）时，则 $B_1P\subset$ 平面 B_1GH，则 $B_1P\parallel$ 平面 A_1NC_1，

故点 P 的轨迹为 $\triangle B_1GH$ 的边（除去点 B_1），则 $|B_1G|=\sqrt{BB_1^2+BG^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$，

同理可得 $|B_1H|=3\sqrt{5}$，结合图形可得 $|B_1P|_{max}=|B_1G|=|B_1H|=3\sqrt{5}$，故B正确；

对于选项C：当 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时，M、N 分别为 AC_1、CD 的中点，如图所示：

此时点 $N(0,3,6)$、$M(3,3,3)$、$D_1(0,0,0)$，$\overrightarrow{D_1N}=(0,3,6)$，



当点 P 在平面 AA_1D_1D 内运动时，设点 $P(x,0,z)$，其中 $0\le x\le 6$，$0\le z\le 6$，

则 $\overrightarrow{MP}=(x-3,-3,z-3)$，

因为 $D_1N\perp MP$，则 $\overrightarrow{D_1N}\cdot\overrightarrow{MP}=-9+6(z-3)=6z-27=0$，解得 $z=\frac{9}{2}$，

设点 P 的轨迹分别交棱 AA_1、DD_1 于点 R、Q，则 $R\left(6,0,\frac{9}{2}\right)$、$Q\left(0,0,\frac{9}{2}\right)$，

当点 P 在平面 CC_1D_1D 内运动时，设点 $P(x,0,z)$，其中 $0\le y\le 6$，$0\le z\le 6$，

则 $\overrightarrow{MP}=(-3,y-3,z-3)$，则 $\overrightarrow{D_1N}\cdot\overrightarrow{MP}=3y-9+6(z-3)=3y+6z-27=0$，

设点 P 的轨迹交棱 CC_1 于点 F，则 $F\left(0,6,\frac{3}{2}\right)$，设点 P 的轨迹交棱 BB_1 于点 T，

因为平面 $AA_1D_1D\parallel$ 平面 BB_1C_1C，平面 $RQFT\cap$ 平面 $AA_1D_1D=RQ$，

平面 $RQFT\cap$ 平面 $BB_1C_1C=FT$，所以 $RQ\parallel FT$，

同理可得 $QF\parallel RT$，所以四边形 $RQFT$ 为平行四边形，

且 $|FT|=|RQ|=6$，$|RT|=|FQ|=\sqrt{0^2+6^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\right)^2}=3\sqrt{5}$，

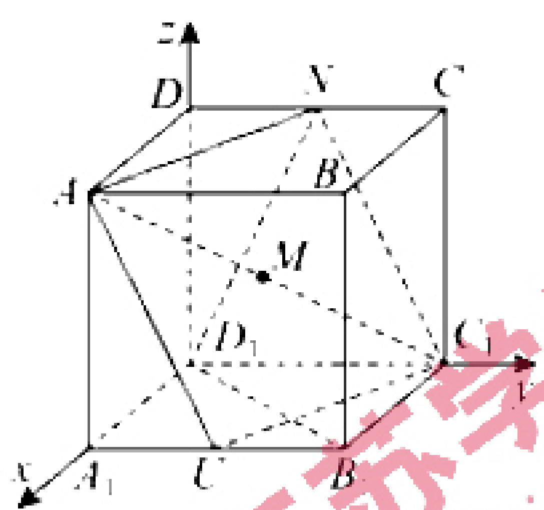
因此点 P 的轨迹的长度即为平行四边形 $RQFT$ 的周长 $2\left(6+3\sqrt{5}\right)=12+6\sqrt{5}$，故C正确；

对于 D 选项：设截面 AMN 交棱 A_1B_1 于点 U，连接 AU、C_1U，由题意可知，截面 AMN 与平面 AC_1N 重合，

因为平面 $ABCD$ // 平面 $A_1B_1C_1D_1$，平面 $ANC_1\cap$ 平面 $ABCD = AN$，

平面 $ANC_1\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = C_1U$，所以 AN // C_1U，同理可得 AU // C_1N，

所以四边形 AUC_1N 为平行四边形，



因为 $N(0,6-6\lambda,6)$，其中 $0<\lambda<1$，则 $\overrightarrow{AN}=(-6,6-6\lambda,0)$，$\overrightarrow{C_1N}=(0,-6\lambda,6)$，

且 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{C_1N}=-6\lambda(6-6\lambda)=36\lambda(\lambda-1)<0$，即 AN 与 C_1N 不可能垂直，

所以平行四边形 AUC_1N 不可能为矩形，即过 A、M、N 三点的截面不可能是矩形，故 D 错误.

故选：ABC.

12. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-m$（$x\in\mathbf{R}$），$g(x)=\sin x-\cos x$（$x\geq 0$），则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $f(x)$ 有两个零点，则 $m>1$

B. 若 $x_1\neq x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2<0$

C. 函数 $y=g(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{5\pi}{4}\right]$ 有两个极值点

D. 过原点的动直线 l 与曲线 $y=g(x)$ 相切，切点的横坐标从小到大依次为：x_1，x_2，…，x_n.则 $x_n=\tan\left(x_n-\dfrac{\pi}{4}\right)$

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 项：方法 1：分离参数画图即可求得 m 的范围；方法 2：研究原图的图象与 x 轴交点即可；B 项：

由极值点偏移的证明步骤即可证得结果；C项：应用辅助角公式化简$g(x)$，求$g(x)$的极值点可得；D项：

由$k=\dfrac{g(x_n)-g(0)}{x_n-0}=g'(x_n)$化简可得.

【详解】A项：方法1：$\because f(x)=e^x-x-m$有两个零点，即：方程$e^x-x=m$有两个根.

令$h(x)=e^x-x$

$\therefore\begin{cases}h(x)=e^x-x\\ y=m\end{cases}$ 有两个交点.

$\because h'(x)=e^x-1$

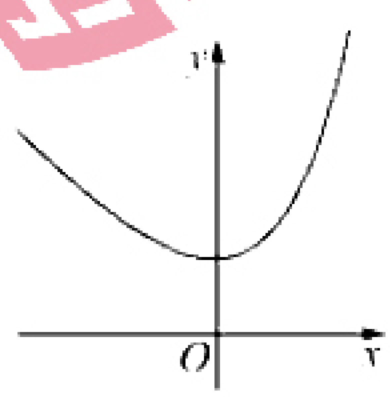
$\therefore$令$h'(x)=0$，解得$x=0$，

当$x<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，

当$x>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增.

当$x\to+\infty$，$h(x)\to+\infty$，当$x\to-\infty$，$h(x)\to+\infty$.

$h(x)$如图所示，



又$\because h(0)=e^0-0=1$

$\therefore m>1$，A正确.

方法2：$f(x)=e^x-x-m$，则$f'(x)=e^x-1$，

令$f'(x)=0$，解得$x=0$，

当$x<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，

当$x>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

所以$x=0$是$f(x)$的极小值点同时也是最小值点，即$f(x)_{\min}=f(0)=1-m$，

当$m>1$时，$f(0)=1-m<0$，$f(-m)=e^{-m}>0$，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$只有一个零点，

又因为 $f(m)=e^m-2m$，只需证明 $f(m)=e^m-2m>0$ 恒成立，即可得到 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点.

令 $t(m)=e^m-2m$，

$\because t'(m)=e^m-2>0,(m>1)$

$\therefore t(m)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore t(m)>f(1)=e-2>0$

$\therefore t(m)=e^m-2m>0$ 恒成立得证.

$\therefore f(x)$ 在 R 上有两个零点，A 正确；

B 项：方法 1：由 A 项知$\because f(x_1)=f(x_2)$

$\therefore m=h(x_1)=h(x_2)$ 且 $m>1$ 且 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

不妨设：$x_1<0$，$x_2>0$

要证：$x_1+x_2<0$

只需证：$x_1<-x_2$

又$\because x_1<0$，$x_2>0$

$\therefore x_1<-x_2<0$

又$\because h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减.

$\therefore$只需证：$h(x_1)>h(-x_2)$

又$\because h(x_1)=h(x_2)$

$\therefore$只需证：$h(x_2)>h(-x_2)$，$x_2>0$

令 $H(x)=h(x)-h(-x)$

$\therefore$只需证：$H(x)>0$，$x>0$

$\because H'(x)=h'(x)+h'(-x)=e^x-1+e^{-x}-1=e^x+e^{-x}-2$

当 $x>0$，$e^x+e^{-x}-2>0$ 恒成立，所以 $H'(x)>0$，

$\therefore H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增

$\therefore H(x)>H(0)=0$

∴原命题得证. B 正确.

C 项： $\because g(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$\therefore x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$， $k\in Z$ 解得： $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$， $k\in Z$即为 $g(x)$ 的极值点.

$\therefore g(x)$在区间$[0,\frac{5\pi}{4}]$ 有 1 个极值点为 $\frac{3\pi}{4}$. C 项错误.

D. $\because g(x)=\sin x-\cos x$， $x\in[0,+\infty)$，则 $g'(x)=\cos x+\sin x$，

设切点坐标为 $\left(x_n,g\left(x_n\right)\right)$，则切线斜率为 $k=g'\left(x_n\right)=\cos x_n+\sin x_n$，

则 $\frac{\sin x_n-\cos x_n-0}{x_n-0}=\cos x_n+\sin x_n$，

即 $x_n=\frac{\sin x_n-\cos x_n}{\cos x_n+\sin x_n}=\frac{\tan x_n-1}{1+\tan x_n}=\tan\left(x_n-\frac{\pi}{4}\right)$，D 正确.

故选：ABD.

【点睛】函数零点的求解与判断方法：

(1)直接求零点：令 $f(x)=0$，如果能求出解，则有几个解就有几个零点．

(2)零点存在性定理：利用定理不仅要函数在区间$[a,b]$上是连续不断的曲线，且 $f(a)f(b)<0$，还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点．

(3)利用图象交点的个数：将函数变形为两个函数的差，画两个函数的图象，看其交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点．

极值点偏移问题的解法：

(1)(对称化构造法)构造辅助函数：

对结论 $x_1+x_2>(<)2x_0$ 型，构造函数 $F(x)=f(x)-f(2x_0-x)$；

对结论 $x_1x_2>(<)x_0^2$ 型，构造函数 $F(x)=f(x)-f\left(\frac{x_0^2}{x}\right)$，通过研究 $F(x)$的单调性获得不等式．

(2)(比值代换法)通过代数变形将所证的双变量不等式通过代换 $t=\frac{x_1}{x_2}$ 化为单变量的函数不等式,利用函数单调性证明．

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20 分）

13. 已知 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{12})(\omega>0)$，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4})$ 有最小值无最大值，则 $\omega=$______.

【答案】$\frac{17}{2}$

【解析】

【详解】试题分析：因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，所以直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{12})(\omega>0)$ 的一条对称轴，又因为 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4})$ 有最小值无最大值，所以 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{12}=\frac{3}{2}\pi$，解得 $\omega=\frac{17}{2}$；故填 $\frac{17}{2}$.

考点：三角函数的性质.

14. 定义运算 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ 则不等式 $\begin{vmatrix} ax & 1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}<0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】$(-4,0]$

【解析】

【分析】由题意可得：$ax^2+ax-1<0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，分 $a=0$ 和 $a\neq0$ 两种情况，结合一元二次不等式恒成立问题分析求解.

【详解】由题意可得 $\begin{vmatrix} ax & 1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}=ax^2+ax-1<0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

若 $a=0$，则 $-1<0$，符合题意，即 $a=0$ 成立；

若 $a\neq0$，则 $\begin{cases} a<0 \\ \Delta=a^2+4a<0 \end{cases}$，解得 $-4<a<0$；

综上所述：实数 a 的取值范围是 $(-4,0]$.

故答案为：$(-4,0]$.

15. 正 $\triangle ABC$ 的三个顶点都在球 O 的球面上，$AB=AC=2$，若三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 2，则该球的表面积为______ .

【答案】$\frac{160\pi}{3}$

【解析】

【详解】由题可知截面小圆的半径$r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.又$\because V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times d=2\Rightarrow d=2\sqrt{3}$.所以

$R=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{40}{3}}$,$\therefore S=4\pi R^2=\frac{160\pi}{3}$

16. 对于数列$\{a_n\}$，使数列$\{a_n\}$的前k项和为正整数的k的值叫做"幸福数". 已知$a_n=\log_4\frac{n+1}{n}$，则在区间$[1，2021]$内的所有"幸福数"的个数为________.

【答案】5

【解析】

【分析】求得数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，结合对数运算列不等式，由此求得"幸福数"的个数.

【详解】$a_n=\log_4\frac{n+1}{n}=\log_4(n+1)-\log_4 n$，

设$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则$S_n=\log_4 2-\log_4 1+\log_4 3-\log_4 2+\cdots+\log_4(n+1)-\log_4 n=\log_4(n+1)$，

S_n为整数，设为m，$\log_4(n+1)=m$，

$\therefore n+1=4^m$，$1\le n=4^m-1\le 2021$，m可取1，2，3，4，5共5个数，

$\therefore$"幸福数"有5个.

故答案为：5

四、解答题（本大题共6小题，共70分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 在$\triangle ABC$中，a，b，c分别是角A，B，C的对边，且$\frac{\sin B}{1+\cos B}=\frac{\sin A}{2-\cos A}$.

（1）若$A=\frac{\pi}{3}$，求$\frac{1-\cos B}{\sin B}$的值；

（2）若$b=1$，求$\triangle ABC$的面积的最大值.

【答案】（1）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

（2）$\frac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】（1）由$A=\frac{\pi}{3}$可知$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos A=\frac{1}{2}$，由同角三角关系可得$\frac{1-\cos B}{\sin B}=\frac{\sin B}{1+\cos B}$，进而可求得结果；

（2）由 $\frac{\sin B}{1+\cos B}=\frac{\sin A}{2-\cos A}$ 结合正弦定理可得 $2b=a+c=2$，在 $\triangle ABC$ 中利用余弦定理和同角三角函数的关系可得 $\sin B=\sqrt{\frac{3}{ac}-\frac{9}{4a^2c^2}}$，然后利用三角形面积公式和基本不等式可求得结果.

【小问 1 详解】

因为 $A=\frac{\pi}{3}$，可知 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos A=\frac{1}{2}$，

由已知可得 $\frac{\sin B}{1+\cos B}=\frac{\sin A}{2-\cos A}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又因为 $\frac{1-\cos B}{\sin B}=\frac{(1-\cos B)(1+\cos B)}{\sin B(1+\cos B)}=\frac{1-\cos^2 B}{\sin B(1+\cos B)}=\frac{\sin B}{1+\cos B}$

所以 $\frac{1-\cos B}{\sin B}=\frac{\sin B}{1+\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【小问 2 详解】

在 $\triangle ABC$ 中，$A+B=\pi-c$，

因为 $\frac{\sin B}{1+\cos B}=\frac{\sin A}{2-\cos A}$，则 $(2-\cos A)\times\sin B=\sin A(1+\cos B)$，

即 $2\sin B-\cos A\sin B=\sin A+\cos B\sin A$，

则 $2\sin B=\sin A+\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

可得 $2\sin B=\sin A+\sin(A+B)=\sin A+\sin C$，

由正弦定理可得得 $2b=a+c$

若 $b=1$，则 $a+c=2>1$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(a+c)^2-b^2-2ac}{2ac}=\frac{2^2-1^2}{2ac}-1=\frac{3}{2ac}-1$，

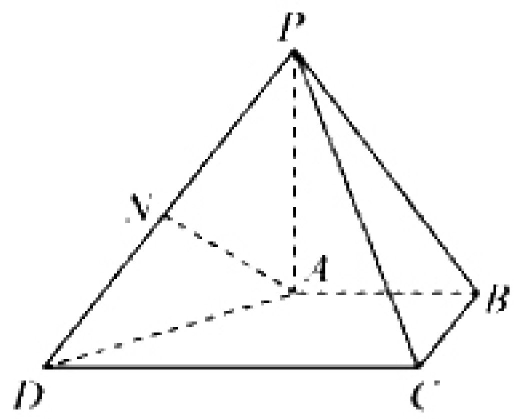
且 $B\in(0,\pi)$，则 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{2ac}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{ac}-\frac{9}{4a^2c^2}}$，

可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ac\sqrt{\frac{3}{ac}-\frac{9}{4a^2c^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{3ac-\frac{9}{4}}\le\frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

当且仅当 $a=c=1$ 时，等号成立，

所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\parallel CD$，且 $AB=1$，$CD=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PA=1$，$AB\perp BC$，N 为 PD 的中点．



（1）求证：$AN//$ 平面 PBC；

（2）求二面角 $B-PC-D$ 的正弦值．

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

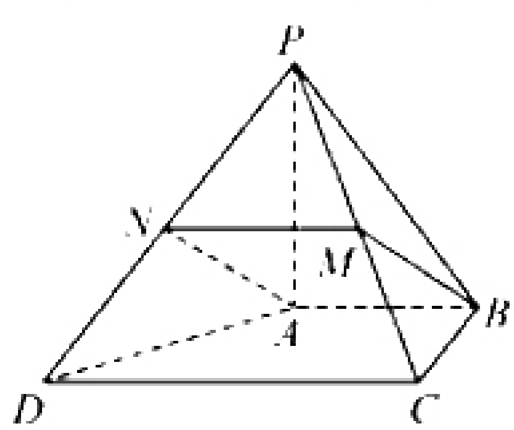
【解析】

【分析】（1）取 PC 中点为 M，连接 NM，MB，进而证明四边形 $NMBA$ 为平行四边形即可证明结论；

（2）取 DC 中点为 E，以A 为空间直角坐标系原点，AE 为 x 轴，AB 为 y 轴，AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用坐标法求解即可；

【小问 1 详解】

证明：取 PC 中点为 M，连接 NM，MB，如图所示，



因为 M，N 分别是 PC，PD 的中点，所以 $NM\parallel DC$ 且 $NM=\dfrac{1}{2}DC$，

又因为 $AB\parallel DC$ 且 $AB=\dfrac{1}{2}DC$，

所以 $NM\parallel AB$，$NM=AB$，

所以四边形 $NMBA$ 为平行四边形，

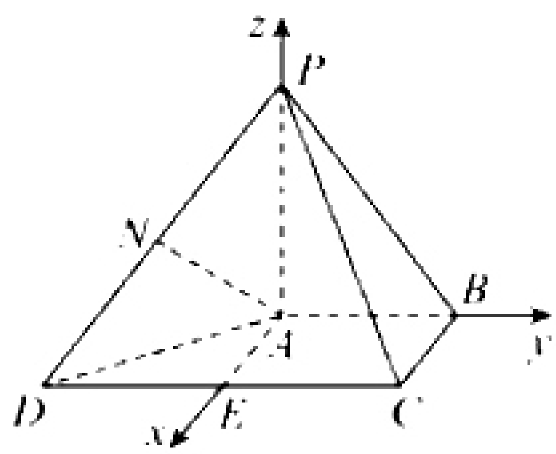
所以 $AN\parallel BM$，

又因为 $AN\not\subset$ 平面 PBC，$BM\subset$ 平面 PBC，

所以 $AN//$ 平面 PBC．

【小问2详解】

解：取 DC 中点为 E，以A为空间直角坐标系原点，AE 为 x 轴，AB 为 y 轴，AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，



则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$B(0,1,0)$，$D(2\sqrt{2},-1,0)$，$C(2\sqrt{2},1,0)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{BP}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(2\sqrt{2},0,0)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\vec{m}=-y+z=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\vec{m}=2\sqrt{2}x=0\end{cases}$，令 $y=1$，解得 $\begin{cases}x=0\\ z=1\end{cases}$，即 $\vec{m}=(0,1,1)$，

设平面 PDC 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，

因为 $\overrightarrow{PD}=(2\sqrt{2},-1,-1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}=2\sqrt{2}a-b-c=0\\ \overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=2b=0\end{cases}$，令 $a=\sqrt{2}$，解得 $\begin{cases}b=0\\ c=4\end{cases}$，即 $\vec{n}=(\sqrt{2},0,4)$，

记平面 PDC 与平面 PBC 夹角为 θ，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{4}{\sqrt{2}\times\sqrt{18}}=\frac{2}{3}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

所以二面角 $B-PC-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

19. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，公比大于0，已知 $a_1=b_1=3$，$b_2=a_3$，$b_3=4a_2+3$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\begin{cases}1, & n\text{为奇数,}\\ b_{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数,}\end{cases}$ 求 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}$ $(n\in N^*)$.

【答案】(1) $a_n=3n$，$b_n=3^n$；

（II）$\dfrac{(2n-1)3^{n+2}+6n^2+9}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$

【解析】

【分析】(I) 首先设出等差数列的公差，等比数列的公比，根据题意，列出方程组，求得 $\begin{cases}d=3\\q=3\end{cases}$，进而求得等差数列和等比数列的通项公式；

（II）根据题中所给的 c_n 所满足的条件，将 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}$ 表示出来，之后应用分组求和法，结合等差数列的求和公式，以及错位相减法求和，最后求得结果.

【详解】(I) 解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

依题意，得 $\begin{cases}3q=3+2d\\3q^2=15+4d\end{cases}$，解得 $\begin{cases}d=3\\q=3\end{cases}$，

故 $a_n=3+3(n-1)=3n$，$b_n=3\times3^{n-1}=3^n$，

所以，$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=3^n$；

（II）$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2b_1+a_4b_2+a_6b_3+\cdots+a_{2n}b_n)$

$=[n\times3+\dfrac{n(n-1)}{2}\times6]+(6\times3^1+12\times3^2+18\times3^3+\cdots+6n\times3^n)$

$=3n^2+6\times(1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n)$，

记 $T_n=1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n$ ①

则 $3T_n=1\times3^2+2\times3^3+\cdots+n\times3^{n+1}$ ②

②−①得，$2T_n=-3-3^2-3^3-\cdots-3^n+n\times3^{n+1}=-\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}+n\times3^{n+1}=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$，

所以 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}=3n^2+6T_n=3n^2+3\times\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$

$=\dfrac{(2n-1)3^{n+2}+6n^2+9}{2}(n\in N^*)$.

【点睛】本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式等基础知识，考查数列求和的基本方法和运算求解能力，属于中档题目.

20. 已知函数 $f(x)=e^x-x^2+2ax$

1)若 a=1,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程

(2)若 $f(x)$ 在 R 上单调递增,求实数 a 的取值范围

【答案】(1) $ex-y+1=0$ (2) $a\ge\ln 2-1$.

【解析】

【详解】分析:(1)求出导数,求出切点和切线的斜率,由点斜式方程,即可得到切线方程;

(2)求出导数,若 $f(x)$ 是单调递增函数,则 $f'(x)=e^x-2x+2a\ge 0$ 恒成立,分离参数构造函数,求出函数的最值即可得到实数 a 的取值范围.

详解:

(1)$\because f'(x)=e^x-2x+2\therefore f'(1)=e$

$\therefore y-f(1)=e(x-1)\therefore ex-y+1=0$

(2) $\because f'(x)=e^x-2x+2a\ge 0\therefore a\ge x-\dfrac{e^x}{2}=g(x)$

Q $g'(x)=1-\dfrac{e^x}{2}=0\therefore x=\ln 2$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递增,在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递减

所以 $g(x)_{\max}=g(\ln 2)=\ln 2-1\therefore a\ge\ln 2-1$..

点睛:本题主要考查导数的几何意义以及函数单调性和导数之间的关系,综合考查导数的应用,属于中档题.

21. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{na_n}{3}$. 已知 a_1, $3a_2$, $9a_3$ 成等差数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明: $T_n<\dfrac{S_n}{2}$.

【答案】(1) $a_n=(\frac{1}{3})^{n-1}$, $b_n=\frac{n}{3^n}$;(2)证明见解析.

【解析】

【分析】(1)利用等差数列的性质及 a_1 得到 $9q^2-6q+1=0$,解方程即可;

(2)利用公式法、错位相减法分别求出 S_n,T_n,再作差比较即可.

【详解】(1) 因为$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列且a_1，$3a_2$，$9a_3$成等差数列，

所以$6a_2=a_1+9a_3$，所以$6a_1q=a_1+9a_1q^2$，

即$9q^2-6q+1=0$，解得$q=\frac{1}{3}$，所以$a_n=(\frac{1}{3})^{n-1}$，

所以$b_n=\frac{na_n}{3}=\frac{n}{3^n}$.

(2) **[方法一]：作差后利用错位相减法求和**

$T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$，

$\frac{S_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$，

$T_n-\frac{S_n}{2}=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{0-\frac{1}{2}}{3^0}+\frac{1-\frac{1}{2}}{3^1}+\frac{2-\frac{1}{2}}{3^2}+\cdots+\frac{n-1-\frac{1}{2}}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$.

设$\Gamma_n=\frac{0-\frac{1}{2}}{3^0}+\frac{1-\frac{1}{2}}{3^1}+\frac{2-\frac{1}{2}}{3^2}+\cdots+\frac{n-1-\frac{1}{2}}{3^{n-1}}$， ⑧

则$\frac{1}{3}\Gamma_n=\frac{0-\frac{1}{2}}{3^1}+\frac{1-\frac{1}{2}}{3^2}+\frac{2-\frac{1}{2}}{3^3}+\cdots+\frac{n-1-\frac{1}{2}}{3^n}$. ⑨

由⑧-⑨得$\frac{2}{3}\Gamma_n=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)-\frac{n-\frac{3}{2}}{3^n}=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n-\frac{3}{2}}{3^n}$.

所以$\Gamma_n=-\frac{1}{4\times3^{n-2}}-\frac{n-\frac{3}{2}}{2\times3^{n-1}}=-\frac{n}{2\times3^{n-1}}$.

因此$T_n-\frac{S_n}{2}=\frac{n}{3^n}-\frac{n}{2\times3^{n-1}}=-\frac{n}{2\times3^n}<0$.

故$T_n<\frac{S_n}{2}$.

[方法二]【最优解】：公式法和错位相减求和法

证明：由 (1) 可得$S_n=\frac{1\times(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n})$，

$T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$，①

$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$，②

①−②得 $\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{n}{3^{n+1}}$，

所以 $T_n=\frac{3}{4}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{n}{2\cdot 3^n}$，

所以 $T_n-\frac{S_n}{2}=\frac{3}{4}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{n}{2\cdot 3^n}-\frac{3}{4}(1-\frac{1}{3^n})=-\frac{n}{2\cdot 3^n}<0$，

所以 $T_n<\frac{S_n}{2}$.

[方法三]：构造裂项法

由（Ⅰ）知 $b_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$，令 $c_n=(\alpha n+\beta)\left(\frac{1}{3}\right)^n$，且 $b_n=c_n-c_{n+1}$，即

$n\left(\frac{1}{3}\right)^n=(\alpha n+\beta)\left(\frac{1}{3}\right)^n-[\alpha(n+1)+\beta]\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$，

通过等式左右两边系数比对易得 $\alpha=\frac{3}{2},\beta=\frac{3}{4}$，所以 $c_n=\left(\frac{3}{2}n+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=c_1-c_{n+1}=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$，下同方法二.

[方法四]：导函数法

设 $f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{x(1-x^n)}{1-x}$，

由于 $\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right]'=\frac{\left[x(1-x^n)\right]'(1-x)-\left[x(1-x^n)\right]\times(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}$，

则 $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}$.

又 $b_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，

所以

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{1}{3}\left[1+2\times\frac{1}{3}+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=$

$\frac{1}{3}\cdot f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2}}$

$=\frac{3}{4}\left[1+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right]=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$，下同方法二.

【整体点评】本题主要考查数列的求和，涉及到等差数列的性质，错位相减法求数列的和，考查学生的数学运算能力，是一道中档题，其中证明不等式时采用作差法，或者作商法要根据式子得结构类型灵活选择，关键是要看如何消项化简的更为简洁.

（2）的方法一直接作差后利用错位相减法求其部分和，进而证得结论；

方法二根据数列的不同特点，分别利用公式法和错位相减法求得 S_n, T_n，然后证得结论，为最优解；

方法三采用构造数列裂项求和的方法，关键是构造 $c_n=(\alpha n+\beta)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$，使 $b_n=c_n-c_{n+1}$，求得 T_n 的表达式，这是错位相减法的一种替代方法，

方法四利用导数方法求和，也是代替错位相减求和法的一种方法.

22. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3ax(a\in\mathbf{R})$.

（1）若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 时有极值，求 a 的值；

（2）在直线 $x=1$ 上是否存在点 P，使得过点 P 至少有两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切？若存在，求出 P 点坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】（1）-1；（2）不存在；答案见解析.

【解析】

【分析】

（1）对函数进行求导，根据极值的定义进行求解即可；

（2）设点 P 坐标，切点坐标，利用导数的意义求出切线方程，通过构造函数，利用导数进行求解即可.

【详解】解析（1）由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3ax$，

得 $f'(x)=x^2-2x+3a$，

由 $f(x)$ 在 $x=-1$ 时有极值，可得 $f'(-1)=1+2+3a=0$，解得 $a=-1$.

$f'(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

当$-1<x<3$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，

因此当$a=-1$时，$f(x)$有极值.

所以a的值为-1.

（2）不妨设在直线$x=1$上存在一点$P(1,b)$，使得过点P至少有两条直线与曲线$y=f(x)$相切.

设过点P且与$y=f(x)$相切的直线为l，切点坐标为(x_0,y_0)，

则切线l的方程为$y-\frac{1}{3}x_0^3+x_0^2-3ax_0=\left(x_0^2-2x_0+3a\right)(x-x_0)$，

又直线l过点$P(1,b)$，所以$b-\frac{1}{3}x_0^3+x_0^2-3ax_0=\left(x_0^2-2x_0+3a\right)(1-x_0)$，

即$\frac{2}{3}x_0^3-2x_0^2+2x_0-3a+b=0$，

设$g(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x-3a+b$，

则$g'(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2\geq 0$，

所以$g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上单调递增，

所以$g(x)=0$至多有一个解，

即过点P且与$y=f(x)$相切的直线至多有一条，

故在直线$x=1$上不存在点P，使得过P至少有两条直线与曲线$y=f(x)$相切.