# 长郡中学2024年高三寒假作业检测试卷

## 数学参考答案

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | C | D | B | D | D | D | C | AB | ABC | BCD |

**一、选择题**(本大题共**8**小题,每小题**5**分,共**40**分.)

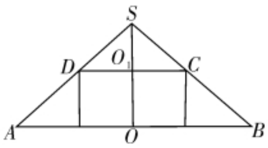
1. B

2. C

3. D

4. B

5. D 【解析】因为圆锥的高与其底面圆的半径相等,设圆锥的高为$h$,底面圆的半径为$r$,则$r=h$,又因为圆锥的体积为$\frac{8\pi}{3}$,可得$\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^3=\frac{8\pi}{3}$,解得$r=2$,则$h=2$,



设圆锥的顶点为$S$,底面圆心为$O$,则高为$SO=2$,$SO$与正方体的上底面交点为$O_1$,在该圆锥内有一个正方体,其下底面的四个顶点在圆锥的底面内,上底面的四个顶点在圆锥的侧面上,取其轴截面,如图所示,设正方体的棱长为$a$,可得$CD=\sqrt{2}a$,

由$\triangle SO_1D\backsim\triangle SOA$,可得$\frac{SO_1}{SO}=\frac{O_1D}{OA}$,即$\frac{2-a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2}$,

解得$a=\frac{4}{2+\sqrt{2}}=4-2\sqrt{2}$,所以该正方体的棱长为$4-2\sqrt{2}$.

6. D 【解析】80 ℃的牛奶放在20 ℃的空气中,冷却2分钟以后物体的温度是50 ℃,

则$50=20+(80-20)e^{-2k}$,$\therefore e^{-2k}=\frac{1}{2}$,两边取以e为底的对数,得

$-2k=\ln 1-\ln 2$,解得$k=\frac{\ln 2}{2}$,所以$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-\frac{\ln 2}{2}t}$,

当牛奶的温度从50 ℃降至35 ℃时,$35=20+(50-20)\cdot e^{-\frac{\ln 2}{2}t}$,即$\frac{1}{2}=e^{-\frac{\ln 2}{2}t}$,解得$t=2$,

所以牛奶的温度降至35 ℃还需2 min.

7. D 【解析】$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5}$,$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$,所以$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin 2\alpha=\frac{1}{25}$,解得$\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$,

即$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}>0$,所以$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,故$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{1+\sin 2\alpha}=\sqrt{1+\frac{24}{25}}=\frac{7}{5}$,

$\cos 2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=-\frac{7}{25}$,$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{24}{25}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7}{25}=\frac{31\sqrt{2}}{50}$.

8. C 【解析】由双曲线$C$:$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的$a=3,b=4,c=5$,由题意可得$I$的纵坐标为1,即$I(3,1)$,

又$F_1(-5,0)$,$F_2(5,0)$,可得$\triangle PF_1F_2$两底角和的一半的正切为$\frac{2}{3}$,所以$\triangle PF_1F_2$面积为$\frac{32}{3}$.

**二、选择题**(本大题共**3**小题,每小题**6**分,共**18**分.)

9. AB 【解析】设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,$\therefore A(a,b)$,$\bar{z}=a-bi(a,b\in\mathbf{R})$,$\therefore B(a,-b)$,

$iz=i(a+bi)=-b+ai$,$\therefore C(-b,a)$,

$\overrightarrow{OA}=(a,b)$,$\overrightarrow{OB}=(a,-b)$,$\overrightarrow{OC}=(-b,a)$,$\overrightarrow{AC}=(-b-a,a-b)$,$\overrightarrow{BC}=(-b-a,a+b)$

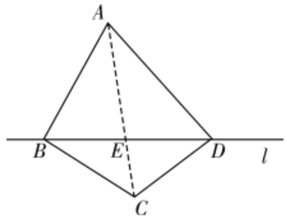
对于A,$\because\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(-b)^2}$,$\therefore|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$,故选项A正确;

对于B,$\because a(-b)+ba=0$,$\therefore\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$,故选项B正确;

对于C,$\because\sqrt{(-b-a)^2+(a-b)^2}\neq\sqrt{(-b-a)^2+(a+b)^2}$($ab\neq0$时),$\therefore|\overrightarrow{AC}|$不等于$|\overrightarrow{BC}|$,故选项C错误;

对于D,$\because a(a-b)-(-b)(-b-a)\neq0$($a\neq(1\pm\sqrt{2})b$时),$\therefore\overrightarrow{OB}$不平行于$\overrightarrow{AC}$,故选项D错误.

10. ABC 【解析】设 $AC$ 与直线 $l$ 交于 $E$，由题可得 $AE=2EC$，




又 $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\sin x\right)\overrightarrow{AB}+(1+f(x))\overrightarrow{AD}$，

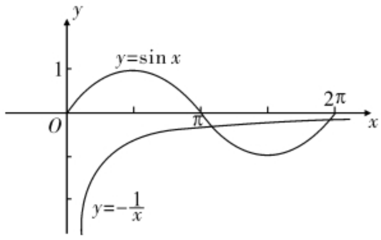
$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\sin x\right)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(1+f(x))\overrightarrow{AD}$，

$\because B$、$E$、$D$ 三点共线，

$\therefore \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\sin x\right)+\frac{2}{3}(1+f(x))=1$，

$\therefore f(x)=\frac{1}{x}+\sin x$，函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，又 $f(-x)=-\frac{1}{x}-\sin x=-f(x)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数，故 A 正确；




因为函数 $y=\frac{1}{x}$，$y=\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上为减函数，

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，故 B 正确；

由 $f(x)=\frac{1}{x}+\sin x=0$，可得 $\sin x=-\frac{1}{x}$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 的零点数即为 $y=\sin x$ 与 $y=-\frac{1}{x}$ 的交点数，

结合函数 $y=\sin x$，$y=-\frac{1}{x}$ 的图象可得 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有两个零点，故 C 正确；

因为 $f(x)=\frac{1}{x}+\sin x$，函数 $\sin x$ 为周期函数，而函数 $\frac{1}{x}$ 不是周期函数，

故 $f(x)$ 不是周期函数，故 D 错误.

11. BCD 【解析】因为 $f(x)=0$ 符合条件，故 A 错误；

因为偶函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x+2)=f(-x)=f(x)$，则 2 是 $f(x)$ 的一个周期，故 B 正确；

因为对任意 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，所以对任意 $x\in[0,1]$，取 $x_1=x_2=\frac{x}{2}$ 得 $f(x)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geqslant 0$；若 $f(1)=1$，即 $f(1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4=1$，故 $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$，

由 2 是 $f(x)$ 的周期得 $f\left(\frac{2023}{4}\right)=f\left(506-\frac{1}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=1$，故 C 正确；

假设 $f(1)=\frac{1}{2024}$，由 $f(1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4=\frac{1}{2024}$ 及 $f(x)\geqslant 0$，$x\in[0,1]$，

得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2024}}$，$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{2024}}$，故 $f\left(\frac{1}{4}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$，这与 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增矛盾，故 D 正确.

**三、填空题**(本大题共 **3** 小题，每小题 **5** 分，共 **15** 分.)

12. 10

13. 11 【解析】根据题意，设样本数据 $a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$ 的平均数为 $\overline{x}$，

其方差 $s^2=\frac{1}{5}[(a_1-\overline{x})^2+(a_2-\overline{x})^2+(a_3-\overline{x})^2+(a_4-\overline{x})^2+(a_5-\overline{x})^2]$

$=\frac{1}{5}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2-2a_1\overline{x}-2a_2\overline{x}-2a_3\overline{x}-2a_4\overline{x}-2a_5\overline{x}+5\overline{x}^2)$

$=\frac{1}{5}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2-5\overline{x}^2)$，

又 $s^2=\frac{1}{5}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2-80)$，则有 $5\overline{x}^2=80$，解得 $\overline{x}=4$，

则样本数据 $2a_1+3$、$2a_2+3$、$2a_3+3$、$2a_4+3$、$2a_5+3$ 的平均数为 $2\overline{x}+3=11$.

14. $\frac{1}{2}$ 【解析】设椭圆半焦距为 $c$，则 $F(c,0)$，则过点 $F$，倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 $l$ 的方程为：$y=x-c$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，线段 $AB$ 的中点 $Q(x_0,y_0)$. 联立 $\begin{cases}y=x-c,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$

化为$(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+a^2c^2-a^2b^2=0$，∴$x_1+x_2=\frac{2a^2c}{a^2+b^2}$，$x_1x_2=\frac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$.

∴$|AB|=\sqrt{1+1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4ab^2}{a^2+b^2}$，∴$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a^2c}{a^2+b^2}$，$y_0=x_0-c=-\frac{b^2c}{a^2+b^2}$，

∴$AB$的垂直平分线的方程为：$y+\frac{b^2c}{a^2+b^2}=-\left(x-\frac{a^2c}{a^2+b^2}\right)$，令$y=0$，解得$x_P=\frac{c^3}{a^2+b^2}$，

∴$P\left(\frac{c^3}{a^2+b^2},0\right)$. ∴$|PF|=|c-x_P|=\frac{2b^2c}{a^2+b^2}$，∴$\frac{|PF|}{|AB|}=\frac{c}{2a}=\frac{1}{4}$，则$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，∴椭圆$C$的离心率为$\frac{1}{2}$.

**四、解答题**（本大题共**5**小题，共**77**分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

15.**【解析】**(1)每道题的抢答中，记甲得一分为事件$M$，

由题意得$M$的发生有两种可能：甲抢到题且答对，乙抢到题且答错，

所以$P(M)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，

故比赛开始，甲先得一分的概率为$\frac{3}{5}$. ………………………… 5分

(2)由(1)知，在每道题的抢答中甲、乙得一分的概率分别$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{5}$，

设两人共抢答了$X$道题比赛结束，且甲获胜，根据比赛规则，$X$的所有可能取值为3，4，5，

则$P(X=3)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$， ………………………… 7分

$P(X=4)=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{162}{625}$， ………………………… 9分

$P(X=5)=C_4^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{648}{3125}$， ………………………… 11分

所以甲获胜的概率$P=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{2133}{3125}$. ………………………… 13分

16.**【解析】**(1)当$a=0$时，$f(x)=e^x-\sin x$，则$f'(x)=e^x-\cos x$， ………………………… 2分

在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上$f'(x)=e^x-\cos x>0$，即$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，

所以最小值为$f(0)=e^0-\sin 0=1$，最大值为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}}-1$. ………………………… 7分

(2)由题意$f'(x)=e^x-\cos x-2ax$，则$f'(0)=e^0-\cos 0-0=0$，

令$g(x)=e^x-\cos x-2ax$，则$g'(x)=e^x+\sin x-2a$，且$a<\frac{1}{2}$.

所以$g'(0)=e^0+\sin 0-2a=1-2a>0$，即$f'(x)$在$x=0$处有递增趋势， ………………………… 10分

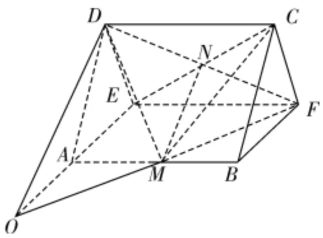
综上，若$\Delta x>0$且$\Delta x$无限趋向于0，

在$x\in(-\Delta x,0)$上$f'(x)<0$，$f(x)$递减，

在$x\in(0,\Delta x)$上$f'(x)>0$，$f(x)$递增，

所以$f(x)$在$x=0$处取得极小值. ………………………… 15分

17.**【解析】**(1)因为直线$MF\subset$平面$ABFE$，故点$O$在平面$ABFE$内，也在平面$ADE$内，




所以点$O$在平面$ABFE$与平面$ADE$的交线(即直线$AE$)上，

延长$EA$，$FM$交于点$O$，连接$OD$(如图所示)，

证明：因为$AO/\!/BF$，$M$为$AB$的中点，所以$\triangle OAM\cong\triangle FBM$，

所以$OM=FM$，即$M$是$OF$的中点，则$AO=BF=2$，

故点$O$在$EA$的延长线上且与点$A$间的距离为2；

连接$DF$交$EC$于点$N$，因为四边形$CDEF$为矩形，所以$N$是$DF$的中点，

又因为$M$是$OF$的中点，

连接$MN$，则$MN$为$\triangle DOF$的中位线，所以$MN/\!/OD$，又$MN\subset$平面$EMC$，$OD\not\subset$平面$EMC$，

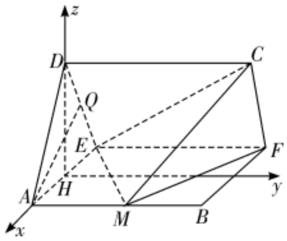
所以直线$OD/\!/$平面$EMC$. ………………………… 6分

(2)由题意知 $EF\perp AE$,$EF\perp DE$,又 $EA\cap DE=E$,且 $EA,DE\subset$ 平面 $ADE$,

所以 $EF\perp$ 平面 $ADE$,且 $\angle DEA=60^\circ$,所以平面 $ABFE\perp$ 平面 $ADE$,因为 $\angle DEA=60^\circ$,$DE=AE$,

所以 $\triangle ADE$ 为等边三角形,取 $AE$ 的中点 $H$,连接 $DH$,则 $DH\perp AE$,

而平面 $ABFE\cap$ 平面 $ADE=AE$,且 $DH\subset$ 平面 $ADE$,所以 $DH\perp$ 平面 $ABFE$, ……………………………… 9 分




以 $H$ 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $E(-1,0,0)$,$D(0,0,\sqrt{3})$,$C(0,4,\sqrt{3})$,$F(-1,4,0)$,

所以 $\overrightarrow{ED}=(1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{EC}=(1,4,\sqrt{3})$,

设 $M(1,t,0)(0\leqslant t\leqslant 4)$,则 $\overrightarrow{EM}=(2,t,0)$,

设平面 $EMC$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EM}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+ty=0,\\ x+4y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

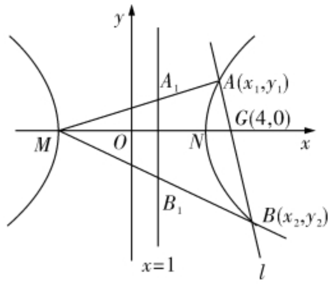
取 $y=-2$,则 $x=t$,$z=\dfrac{8-t}{\sqrt{3}}$,所以平面 $EMC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(t,-2,\dfrac{8-t}{\sqrt{3}}\right)$, ……………………………… 12 分

要使直线 $DE$ 与平面 $EMC$ 所成的角为 $60^\circ$,

则 $|\cos\langle\overrightarrow{ED},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{8}{2\sqrt{t^2+4+\left(\dfrac{8-t}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{t^2-4t+19}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,整理得 $t^2-4t+3=0$,解得 $t=1$ 或 $t=3$,

所以存在点 $M$,即为线段 $AB$ 上靠近 $A$ 或 $B$ 的一个四等分点,使得直线 $DE$ 与平面 $EMC$ 所成的角为 $60^\circ$. ……………………………………………………………………………………………… 15 分




18.【解析】(1)由题意得 $e_1=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$,$e_2=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$,

所以 $e_1e_2=\dfrac{\sqrt{a^4-1}}{a^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,

又 $a>1$,解得 $a^2=4$,

(ⅰ)故双曲线 $C_2$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$, ……………………………… 3 分

(ⅱ)设直线 $AB$ 的方程为 $x=ty+4$,

则 $\begin{cases}x=ty+4,\\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$ 消元得,$(t^2-4)y^2+8ty+12=0$,$\Delta>0$,

且 $t\neq\pm 2$,所以 $y_1+y_2=\dfrac{-8t}{t^2-4}$,$y_1y_2=\dfrac{12}{t^2-4}$,

故 $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-\dfrac{2t}{3}$, ……………………………………………………………… 6 分

又直线 $AA_1$ 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,所以 $y_3=\dfrac{3y_1}{x_1+2}$,同理 $y_4=\dfrac{3y_2}{x_2+2}$,

所以 $\dfrac{1}{y_3}+\dfrac{1}{y_4}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x_1+2}{y_1}+\dfrac{x_2+2}{y_2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{ty_1+6}{y_1}+\dfrac{ty_2+6}{y_2}\right)=\dfrac{2ty_1y_2+6(y_1+y_2)}{3y_1y_2}$

$=\dfrac{2}{3}t+\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_1y_2}=\dfrac{2}{3}t+2\left(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}\right)=\dfrac{2}{3}t-\dfrac{4}{3}t=-\dfrac{2}{3}t$,

故 $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_3}+\dfrac{1}{y_4}$. ……………………………………………………………… 9 分

(2)设两个切点 $P_1(x_5,y_5)$,$P_2(x_6,y_6)$,由题意知 $PP_1$,$PP_2$ 斜率存在,

直线 $PP_1$ 的方程为 $l_1$:$y=k_1(x-x_5)+y_5$,

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1,\\ y=k_1(x-x_5)+y_5,\end{cases}$ 由 $\Delta=0$ 得 $k_1=-\dfrac{x_5}{a^2y_5}$,所以 $l_1$:$\dfrac{x_5x}{a^2}+y_5y=1$,

同理直线 $PP_2$ 方程为 $l_2:\frac{x_6x}{a^2}+y_6y=1$，

由 $l_1,l_2$ 过 $P$ 点可得 $\begin{cases}\frac{x_5x_0}{a^2}+y_5y_0=1,\\ \frac{x_6x_0}{a^2}+y_6y_0=1,\end{cases}$ 可得直线 $P_1P_2$ 的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+y_0y=1$， ………………………………… 12 分

不妨设，直线 $P_1P_2$ 与双曲线两渐近线 $y=\pm\frac{1}{a}x$ 交于两点 $P_1'\left(\frac{a^2}{x_0+ay_0},\frac{a}{x_0+ay_0}\right)$，$P_2'\left(\frac{a^2}{x_0-ay_0},\frac{-a}{x_0-ay_0}\right)$，

则围成三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\left|\frac{a^2}{x_0+ay_0}\cdot\frac{-a}{x_0-ay_0}-\frac{a}{x_0+ay_0}\cdot\frac{a^2}{x_0-ay_0}\right|=\left|\frac{a^3}{x_0^2-a^2y_0^2}\right|$， ………………………… 15 分

因为 $P$ 在双曲线 $C_2$ 上，$x_0^2-a^2y_0^2=a^2$，则 $S=\frac{a^3}{a^2}=a$ 为定值. ………………………………………………………… 17 分

19.【解析】(1) $A_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$ 是 $\Gamma_3$ 数表，

$d(a_{1,1},a_{2,2})+d(a_{2,2},a_{3,3})=2+3=5$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)由题可知 $d(a_{i,j},a_{i+1,j+1})=|a_{i,j}-a_{i+1,j}|+|a_{i+1,j}-a_{i+1,j+1}|=1\ (i=1,2,3;j=1,2,3)$ .

当 $a_{i+1,j}=1$ 时，有 $d(a_{i,j},a_{i+1,j+1})=|a_{i,j}-1|+|a_{i+1,j+1}-1|=1$，

所以 $a_{i,j}+a_{i+1,j+1}=3$ .

当 $a_{i+1,j}=2$ 时，有 $d(a_{i,j},a_{i+1,j+1})=|a_{i,j}-2|+|a_{i+1,j+1}-2|=1$，

所以 $a_{i,j}+a_{i+1,j+1}=3$ .

所以 $a_{i,j}+a_{i+1,j+1}=3(i=1,2,3;j=1,2,3)$.

所以 $a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}+a_{4,4}=3+3=6$，$a_{1,3}+a_{2,4}=3$，$a_{3,1}+a_{4,2}=3$.

$a_{1,2}+a_{2,3}+a_{3,4}=3+1=4$ 或者 $a_{1,2}+a_{2,3}+a_{3,4}=3+2=5$，

$a_{2,1}+a_{3,2}+a_{4,3}=3+1=4$ 或者 $a_{2,1}+a_{3,2}+a_{4,3}=3+2=5$，

$a_{1,4}=1$ 或 $a_{1,4}=2$，$a_{4,1}=1$ 或 $a_{4,1}=2$，

故各数之和 $\geqslant6+3+3+4+4+1+1=22$，

当 $A_4=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&1&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}$ 时，各数之和取得最小值 22 . ……………………………………………………… 10 分

(3)由于 $\Gamma_4$ 数表 $A_{10}$ 中共 100 个数字，

必然存在 $k\in\{1,2,3,4\}$，使得数表中 $k$ 的个数满足 $T\geqslant25$.

设第 $i$ 行中 $k$ 的个数为 $r_i(i=1,2,\cdots,10)$.

当 $r_i\geqslant2$ 时，将横向相邻两个 $k$ 用从左向右的有向线段连接，

则该行有 $r_i-1$ 条有向线段，

所以横向有向线段的起点总数 $R=\sum\limits_{r_i\geqslant2}(r_i-1)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{10}(r_i-1)=T-10$.

设第 $j$ 列中 $k$ 的个数为 $c_j(j=1,2,\cdots,10)$ .

当 $c_j\geqslant2$ 时，将纵向相邻两个 $k$ 用从上到下的有向线段连接，

则该列有 $c_j-1$ 条有向线段，

所以纵向有向线段的起点总数 $C=\sum\limits_{c_j\geqslant2}(c_j-1)\geqslant\sum\limits_{j=1}^{10}(c_j-1)=T-10$.

所以 $R+C\geqslant2T-20$，

因为 $T\geqslant25$，所以 $R+C-T\geqslant2T-20-T=T-20>0$ .

所以必存在某个 $k$ 既是横向有向线段的起点，又是纵向有向线段的终点，

即存在 $1\leqslant u<v\leqslant10,1\leqslant p<q\leqslant10$，

使得 $a_{u,p}=a_{v,p}=a_{v,q}=k$，

所以 $d(a_{u,p},a_{v,q})=|a_{u,p}-a_{v,p}|+|a_{v,p}-a_{v,q}|=0$，

则命题得证. ……………………………………………………………………………………………… 17 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线