高三年级教学质量监测
数学参考答案(文科)

1. B　由题意可得 $A\cap B=(1,5)$.

2. C　$(1-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i})=(1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)(1+\mathrm{i})=-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=2-2\mathrm{i}$.

3. D　由抛物线 C 的标准方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$,得抛物线 C 的准线方程为 $y=-\frac{1}{8}$.

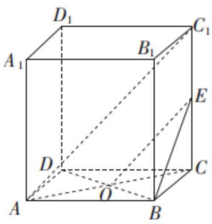
4. B　将该跑步爱好者这周的跑步时长按从小到大的顺序排列为 25,28,32,35,36,39,40,则该跑步爱好者这周跑步时长的中位数是 35.

5. B　由题意可知 A,B,C 最终的排名情况有 (A,B,C),(A,C,B),(B,A,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A),共 6 种,其中符合条件的情况有 (B,A,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A),共 4 种,故所求概率 $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

6. A　设 $g(x)=f(x)-2=2^x-2^{-x}+ax$,则 $g(-x)=2^{-x}-2^x-ax=-g(x)$,所以 $g(x)+g(-x)=0$,即 $f(x)-2+f(-x)-2=0$.所以 $f(x)+f(-x)=4$.因为 $f(2)=5$,所以 $f(-2)=4-5=-1$.

7. A　由题意可得 $\begin{cases} a_1q+a_1q^2=10, \\ \dfrac{qa_1(1-q^3)}{1-q}=14, \end{cases}$ 整理得 $2q^2-5q+2=0$,解得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$(舍去),则 $a_1=1$,故 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=31$.

8. C　连接 AC,交 DB 于点 O,取 CC_1 的中点 E,连接 OE,BE.因为 $AC_1/\!/OE$,所以 BD 与 AC_1 所成的角为 $\angle BOE$(或其补角).令 $EC=x$,在 $\triangle BEO$ 中,由 $AB=8,AD=6$,得 $OB=5$.又 $OE=\sqrt{x^2+25}$,$BE=\sqrt{x^2+36}$,$\cos\angle BOE=\frac{\sqrt{7}}{10}$,由余弦定理得 $\frac{OE^2+OB^2-BE^2}{2OE\cdot OB}=\frac{\sqrt{7}}{10}$,解得 $x=\sqrt{3}$,所以 $CC_1=2\sqrt{3}$.



9. A　由 $f(x)=\ln x-x+a$,即 $x\ln x=\ln x-x+a$,得 $a=(x-1)\ln x+x$.

设 $g(x)=(x-1)\ln x+x$,则 $g'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}+1=\ln x-\frac{1}{x}+2$,显然 $g'(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数.因为 $g'(\frac{1}{2})=-\ln 2<0$,$g'(1)=1>0$,所以存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$,使得 $g'(x_0)=\ln x_0-\frac{1}{x_0}+2=0$,即 $\ln x_0=\frac{1}{x_0}-2$.当 $x\in(0,x_0)$ 时,$g'(x)<0$,当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,则 $g(x)_{\min}=g(x_0)=(x_0-1)\ln x_0+x_0=3-(x_0+\frac{1}{x_0})$.因为 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$,所以 $x_0+\frac{1}{x_0}\in(2,\frac{5}{2})$,则 $g(x_0)\in(\frac{1}{2},1)$,故 $a\geqslant 1$.

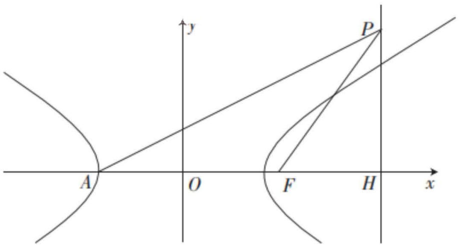
10. D　因为 $f(x)=2\cos x\cos\varphi+2\sin x\sin\varphi+\cos x=2\sin\varphi\sin x+(2\cos\varphi+1)\cos x=\sqrt{(2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi+1)^2}\sin(x+\alpha)$,所以 $\sqrt{(2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi+1)^2}=\sqrt{6}$,所以 $\cos\varphi=$

$\frac{1}{4}$,则 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{15}}{4}$,故 $f(\frac{\pi}{3})=2\cos(\frac{\pi}{3}-\varphi)+\cos\frac{\pi}{3}=\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi+\frac{1}{2}=\frac{3+3\sqrt{5}}{4}$.

11. C　在三棱锥 $C\text{-}ABD$ 中,底面 ABD 是以 AB 为斜边的直角三角形.
设底面 ABD 外接圆的圆心为 O',则其半径 $r=4$,设三棱锥 $C\text{-}ABD$ 外接球的球心为 O,半径为 R,因为二面角 $A\text{-}BD\text{-}C$ 为 $\frac{\pi}{3}$,所以点 C 到底面的距离为 $2\sqrt{3}$,且点 C 在底面的射影为 AD 的中点 E,所以 $O'E=2\sqrt{3}$. 设球心 O 到底面 ABD 的距离为 d,则 $r^2+d^2=R^2$,且 $O'E^2+(2\sqrt{3}-d)^2=R^2$,解得 $R^2=\frac{52}{3}$,所以 $S=4\pi R^2=\frac{208}{3}\pi$.

12. B　如图,直线 $x=2c$ 与 x 轴交于点 H,设 $|PH|=m$,则 $\tan\angle PFH=\frac{m}{c}$,$\tan\angle PAH=\frac{m}{a+2c}$. 因为 $\angle APF=\angle PFH-\angle PAH$,所以 $\tan\angle APF=\tan(\angle PFH-\angle PAH)=\frac{\tan\angle PFH-\tan\angle PAH}{1+\tan\angle PFH\cdot\tan\angle PAH}=\frac{m(a+c)}{ac+2c^2+m^2}=\frac{(a+c)}{m+\frac{ac+2c^2}{m}}$. 因为 $m+\frac{ac+2c^2}{m}\geqslant 2\sqrt{ac+2c^2}$,

当且仅当 $m=\sqrt{ac+2c^2}$ 时,等号成立,所以 $\tan\angle APF$ [illegible] $\frac{a+c}{2\sqrt{ac+2c^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,整理得 $c^2-4ac-3a^2=0$,则 $e^2-4e-3=0$,解得 $e=2+\sqrt{7}$.

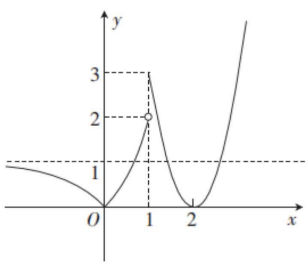


13. -8　画出可行域(图略),当直线 $z=x-2y$ 经过 $A(-2,3)$ 时,z 取得最小值,最小值为 -8.

14. 5　由等差数列性质可得 $S_{13}=13a_7=65$,则 $a_7=5$,故 $2a_5-a_3=2(a_1+4d)-(a_1+2d)=a_1+6d=a_7=5$.

15. $-\frac{3}{4}$　因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$,则 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=-\frac{11}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. 因为 $\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,所以 $x=-\frac{11}{12}$,$y=\frac{1}{6}$,则 $x+y=-\frac{11}{12}+\frac{1}{6}=-\frac{3}{4}$.

16. $(-\infty,4)$　作出 $f(x)$ 的大致图象,不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4$,则 $x_3+x_4=4$,$1-3^{x_1}=3^{x_2}-1$,从而 $3^{x_1}+3^{x_2}=2$. 因为 $3^{x_1}>0$,$3^{x_2}>0$,且 $3^{x_1}\neq 3^{x_2}$,所以 $3^{x_1+x_2}<1$,所以 $x_1+x_2<0$,则 $x_1+x_2+x_3+x_4<4$.



17. 解:(1)因为 $\cos C=-\frac{1}{4}$,所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. ……………………………………………… 2分

因为 $c=2a$，所以 $\sin C=2\sin A$，…………………………………………………… 3 分

则 $\sin A=\frac{\sin C}{2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$. …………………………………………………… 5 分

(2)因为 $\cos C=-\frac{1}{4}$，所以 $c^2=a^2+b^2+\frac{1}{2}ab$. …………………………………… 6 分

因为 $c=2a$，所以 $3a^2-\frac{1}{2}ab-b^2=0$，解得 $b=\frac{3}{2}a$. …………………………………… 8 分

因为△ABC 的周长为 18，所以 $a+b+c=\frac{9}{2}a=18$，解得 $a=4$，……………………… 9 分

则 $b=6$，$c=8$. …………………………………………………………………… 10 分

故△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times6\times8\times\frac{\sqrt{15}}{8}=3\sqrt{15}$. ……………………… 12 分

18. 解：(1) $\bar{x}=\frac{20.1+20.4+20.1+20.0+20.1+20.3+20.6+20.5+20.4+20.5}{10}=20.3$，…

…………………………………………………………………………… 2 分

$\bar{y}=\frac{19.8+20.3+20.0+20.2+19.9+19.8+20.0+20.1+20.2+19.7}{10}=20$，……… 4 分

$s_1^2=\frac{0.2^2+0.1^2+0.2^2+0.3^2+0.2^2+0+0.3^2+0.2^2+0.1^2+0.2^2}{10}=0.04$，……… 6 分

$s_2^2=\frac{0.2^2+0.3^2+0+0.2^2+0.1^2+0.2^2+0+0.1^2+0.2^2+0.3^2}{10}=0.036$. …………… 8 分

(2)依题意，$\bar{x}-\bar{y}=0.3=2\sqrt{0.0225}$，$2\sqrt{s_1^2+s_2^2}=2\sqrt{0.036+0.04}=2\sqrt{0.076}$，

$\bar{x}-\bar{y}<\sqrt{s_1^2+s_2^2}$，…………………………………………………………… 11 分

所以该药物对小鼠的生长没有显著的抑制作用. …………………………………… 12 分

19. (1)证明：取 PA 的中点 F，连接 CF，EF，CD.

因为 C，D 为圆弧 AB 的两个三等分点，所以 $CD/\!/AB$，$CD=\frac{1}{2}AB$. ……………………… 2 分

因为 E，F 分别为 PB，PA 的中点，所以 $EF/\!/AB$，$EF=\frac{1}{2}AB$，………………………… 3 分

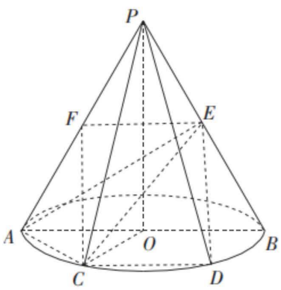
则 $CD/\!/EF$，$EF=CD$，从而四边形 $CDEF$ 为平行四边形，

故 $DE/\!/CF$. …………………………………………………………………… 5 分

因为 $DE\not\subset$ 平面 PAC，$CF\subset$ 平面 PAC，所以 $DE/\!/$ 平面 PAC. ………………………… 6 分

(2)解：作 $CH\perp AB$，垂足为 H，连接 AE，CE，OC. 易证 $CH\perp$ 平面 PAB.

因为 C，D 为圆弧 AB 的两个三等分点，所以 $OA=OC=AC=2$，则 $CH=\sqrt{3}$.



因为△PAB 是边长为 4 的等边三角形，所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

因为 E 是 PB 的中点，所以 $S_{\triangle PAE}=\frac{1}{2}S_{\triangle PAB}=2\sqrt{3}$，

则三棱锥 $C\text{-}PAE$ 的体积 $V_1=\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=2$. …………………………………… 8分

因为 $PA=4$,所以 $PC=4$,则 $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$.

设点 E 到平面 PAC 的距离为 d,则三棱锥 $E\text{-}PAC$ 的体积 $V_2=\frac{1}{3}\times\sqrt{15}d=\frac{\sqrt{15}}{3}d$. ……
………………………………………………………………………………………… 10分

因为 $V_1=V_2$,所以 $\frac{\sqrt{15}}{3}d=2$,解得 $d=\frac{2\sqrt{15}}{5}$,即点 E 到平面 PAC 的距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. ……
………………………………………………………………………………………… 12分

20. 解:(1)由题意可得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\\ a=3,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=3,b=1$, …………………………………… 3分

则椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. …………………………………………………… 4分

(2)当直线 l 的斜率为0时,设 $l:y=n(n\neq0)$,$A(s,n)$,$B(-s,n)$,

则 $k_1=\frac{n}{s-3}$,$k_2=\frac{n}{-s-3}$,从而 $k_1k_2=\frac{n^2}{9-s^2}$.

因为 A 在椭圆 C 上,所以 $\frac{s^2}{9}+n^2=1$,所以 $n^2=\frac{9-s^2}{9}$,则 $k_1k_2=\frac{1}{9}\neq\frac{1}{4}$,不符合题意. ……
………………………………………………………………………………………… 6分

当直线 l 的斜率不为0时,设直线 $l:x=my+t(t\neq3)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{9}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得 $(m^2+9)y^2+2mty+t^2-9=0$,

由题意可知 $\Delta>0$,则 $y_1+y_2=-\frac{2mt}{m^2+9}$,$y_1y_2=\frac{t^2-9}{m^2+9}$. …………………………………… 7分

因为 $P(3,0)$,所以 $k_1=\frac{y_1}{x_1-3}$,$k_2=\frac{y_2}{x_2-3}$,

则 $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-3}\cdot\frac{y_2}{x_2-3}=\frac{y_1y_2}{(x_1-3)(x_2-3)}=\frac{y_1y_2}{(my_1+t-3)(my_2+t-3)}$. ………… 8分

因为 $k_1k_2=\frac{1}{4}$,所以 $\frac{y_1y_2}{(my_1+t-3)(my_2+t-3)}=\frac{1}{4}$,

所以 $(m^2-4)y_1y_1+m(t-3)(y_1+y_2)+(t-3)^2=0$. …………………………………… 9分

将 $y_1+y_2=-\frac{2mt}{m^2+9}$,$y_1y_2=\frac{t^2-9}{m^2+9}$ 代入上式,得 $(m^2-4)\cdot\frac{t^2-9}{m^2+9}+m(t-3)(-\frac{2mt}{m^2+9})+(t-3)^2=0$,则 $(m^2-4)(t^2-9)-2m^2t(t-3)+(t-3)^2(m^2+9)=0$,

整理得 $5t^2-54t+117=0$,即 $(5t-39)(t-3)=0$.

因为 $t\neq3$,所以 $t=\frac{39}{5}$. …………………………………………………………… 11分

故直线 l 过定点 $(\frac{39}{5},0)$. …………………………………………………………… 12分

21. (1)解：$f'(x)=2x(1+x\ln x)+(x^2+4)(1+\ln x)$，…… 1分

则 $f'(1)=2+5=7$，…… 2分

因为 $f(1)=5$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-5=7(x-1)$，

即 $y=7x-2$. …… 4分

(2)证明：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，要证明 $f(x)>4x$，

只需证 $\frac{1}{x}+\ln x>\frac{4}{x^2+4}$. …… 6分

设函数 $g(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$. …… 7分

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$. …… 8分

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=1$，$g(x)\geqslant 1$. …… 9分

设函数 $h(x)=\frac{4}{x^2+4}(x>0)$，则 $h(x)=\frac{4}{x^2+4}<\frac{4}{4}=1$， …… 11分

所以 $h(x)<g(x)$，从而 $\frac{1}{x}+\ln x>\frac{4}{x^2+4}$，故 $f(x)>4x$. …… 12分

22. 解：(1)由 $\begin{cases}x=1+\sqrt{3}t,\\ y=t\end{cases}$ (t 为参数)，得 $x-\sqrt{3}y=1$，即 $x-\sqrt{3}y-1=0$，

则直线 l 的普通方程为 $x-\sqrt{3}y-1=0$. …… 2分

由 $\rho^2+4\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+3=0$，得 $x^2+y^2+4x-2\sqrt{3}y+3=0$，即 $(x+2)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$，则圆 C 的直角坐标方程为 $(x+2)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$. …… 5分

(2)由(1)可知圆 C 的圆心坐标为 $(-2,\sqrt{3})$，半径为 2， …… 7分

则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-2-3-1|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}}=3$， …… 9分

故点 P 到直线 l 的距离的最大值为 $3+2=5$. …… 10分

23. 解：(1)因为 $a=-4$，所以 $f(x)=3|x-2|$. …… 1分

当 $x\leqslant 0$ 时，$3|x-2|\geqslant 3x$ 恒成立，则 $x\leqslant 0$ 符合题意； …… 3分

当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 3x$，即 $|x-2|\geqslant x$，即 $x^2-4x+4\geqslant x^2$，解得 $0<x\leqslant 1$. …… 5分

综上，不等式 $f(x)\geqslant 3x$ 的解集为 $(-\infty,1]$. …… 6分

(2)若 $a=4$，则 $f(x)=\begin{cases}-3x-2, & x\leqslant -2,\\ x+6, & -2<x<2,\\ 3x+2, & x\geqslant 2.\end{cases}$ …… 8分

$f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增， …… 9分

故 $f(x)_{\min}=f(-2)=4$. …… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。