

乌鲁木齐地区 2024 年高三年级第一次质量监测

数学（答案）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分.

1~4ACDC

5~8ABBD

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分.

9. ABC

10. BCD

11. ABD

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分.

12. 4

13. 0.1

14. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 5

四、解答题：本大题共 5 小题，共计 77 分. 解答应在答卷的相应各题中写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. (13 分) (I) 由题设得 $\begin{cases} a_2 + a_4 = 30 \\ S_4 = 45 \end{cases}$, 故 $\begin{cases} a_2 + a_4 = 30 \\ a_1 + a_3 = 15 \end{cases}$,

因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 所以数列 $\begin{cases} q = 2 \\ a_1 = 3 \end{cases}$, 所以 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$;

(II) 由 (I) 得 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{32^{n-1} 32^n} = \frac{1}{18 \cdot 4^{n-1}} = \frac{1}{18} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,

所以 $T_n = \frac{\frac{1}{18} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{27} \left[1 - \frac{1}{4}^n\right] = \frac{2}{27} - \frac{1}{54} \frac{1}{4}^{n-1}$.

16. (15 分) (I) 不能据此判断;

(II) 由频率分布直方图可知, 成绩 90 分以下所占比例为 $7\% + 13\% + 20\% + 24\% = 64\%$, 因此第 85 百分位数一定位于 $[90, 100]$ 内, 由 $90 + 10 \times \frac{85 - 64}{100 - 64} = 90 + \frac{35}{6} \approx 95.8$, 可以估计该地区近视学生的学习成绩的第 85 百分位数约为 95.8;

(III) 设 $A =$ “该地区近视学生”, $B =$ “该地区优秀学生”,

由题设得 $P(B|A) = 0.48$, $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.36$,

所以 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.48 \times 0.54}{0.36} = 0.72$.

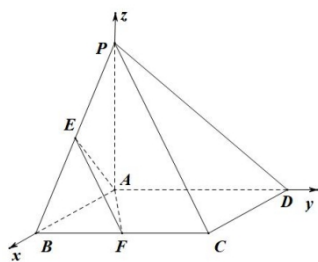
17. (15 分) (I) 以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,

不妨设 $AB = 2$, 则 $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 2, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $P(0, 0, 2)$, $E(1, 0, 1)$, $F(2, 1, 0)$,

$$\overrightarrow{AF} = (2, 1, 0), \quad \overrightarrow{BP} = (-2, 0, 2), \quad \overrightarrow{BC} = (0, 2, 0),$$

设平面 PBC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$, 可取 $\vec{n} = (1, 0, 1)$,

因为 $\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AF} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AF}|} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 所以 AF 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$;



(II) 假设截面 AEF 内存在点 G 满足条件, 设 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AE} + \mu \overrightarrow{AF}$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu \leq 1$,

所以 $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = (\lambda + 2\mu, \mu - 2, \lambda)$, $\overrightarrow{AE} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AF} = (2, 1, 0)$,

因为 $DG \perp$ 平面 AEF , 所以 $\begin{cases} \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda + 5\mu - 2 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} \lambda = -\frac{2}{3} \\ \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$,

这与假设矛盾矛盾, 所以不存在点 G , 使 $DG \perp$ 平面 AEF .

18. (17 分) (I) 由题设得 $\begin{cases} b = 2 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 $a^2 = 12$, 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$;

(II) 由题意可设 $l_{AB}: y = kx + m (m \neq 2)$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$, 整理得 $(1 + 3k^2)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 12 = 0$,

$$\Delta = 36k^2m^2 - 4(1 + 3k^2)(3m^2 - 12) = 12(12k^2 - m^2 + 4).$$

由韦达定理得 $x_1x_2 = \frac{3m^2 - 12}{1 + 3k^2}$, $x_1 + x_2 = \frac{-6mk}{1 + 3k^2}$,

由 $k_{PA} + k_{PB} = 4k_{AB}$ 得 $\frac{y_1 - 2}{x_1} + \frac{y_2 - 2}{x_2} = 4k$, 即 $\frac{kx_1 + m - 2}{x_1} + \frac{kx_2 + m - 2}{x_2} = 4k$,

整理得 $2mk(m-2) = 2(4-m^2)k$, 因为 $k \neq 0$, 得 $m^2 - m - 2 = 0$, 解得 $m = 2$ 或 $m = -1$,

$m = 2$ 时, 直线 AB 过定点 $P(0, 2)$ 舍去;

$m = -1$ 时, 满足 $\Delta = 36(4k^2 + 1) > 0$, 所以直线 AB 过定点 $(0, -1)$.

(III) 由 (II) 得直线 $l_{AB}: y = kx - 1$, 所以 $x = \frac{1}{k}(y + 1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x = \frac{1}{k}(y + 1) \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 整理得 } \left(\frac{1}{k^2} + 3\right)y^2 + \frac{2}{k^2}y + \frac{1}{k^2} - 12 = 0, \Delta = 36\left(\frac{1}{k^2} + 4\right) > 0,$$

$$\text{由题意得 } S_{F_1AF_2B} = \frac{1}{2}|F_1F_2||y_1 - y_2| = 2\sqrt{2}|y_1 - y_2| = 12\sqrt{2} \frac{\sqrt{\frac{1}{k^2} + 4}}{\frac{1}{k^2} + 3},$$

因为 $k_{AF_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, 所以 $k^2 > \frac{1}{8}$, 所以 $0 < \frac{1}{k^2} < 8$, 令 $t = \sqrt{\frac{1}{k^2} + 4}$, $t \in (2, 2\sqrt{3})$,

所以 $S_{F_1AF_2B} = 12\sqrt{2} \frac{t}{t^2 - 1} = 12\sqrt{2} \frac{1}{t - \frac{1}{t}}$, 在 $t \in (2, 2\sqrt{3})$ 上单调递减,

所以 $S_{F_1AF_2B}$ 的范围是 $\left(\frac{24\sqrt{6}}{11}, 8\sqrt{2}\right)$.

19. (17 分) (I) 由题设得 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - 1 (x > 0)$, 所以 $f'(1) = 1 + 2a - 1 = 2a$,

又因为 $f(1) = a - 1 + a + 1 = 2a$, 所以切点为 $(1, 2a)$, 斜率 $k = 2a$,

所以切线方程为 $y - 2a = 2a(x - 1)$, 即 $y = 2ax$, 恒过原点.

(II) 由 (I) 得 $f'(x) = \frac{2ax^2 - x + 1}{x} (x > 0)$,

① $a = 0$ 时, $f'(x) = \frac{-x + 1}{x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减;

② $a > 0$ 时, $\Delta = 1 - 8a$, $a \geq \frac{1}{8}$ 时, $\Delta \leq 0$, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$0 < a < \frac{1}{8}$ 时, $\Delta > 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}, \frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$ 上单调递减, 在

$\left(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}, +\infty\right)$ 上单调递增;

③ $a < 0$ 时, $\Delta > 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}, +\infty\right)$ 上单调递减;

(III) 当 $x=1$ 时, $f(1) \leq e$, 即 $a \leq \frac{e}{2}$,

下面证明当 $a \leq \frac{e}{2}$ 时, $f(x) \leq e^x$, $x \in (0, +\infty)$, 即证 $\ln x + ax^2 - x + a + 1 \leq e^x$,

令 $g(a) = (x^2 + 1)a + \ln x - x - e^x + 1$, 因为 $x^2 + 1 > 0$, 所以 $g(a) \leq g\left(\frac{e}{2}\right)$, 只需证 $g\left(\frac{e}{2}\right) \leq 0$,

即证 $\frac{e}{2}x^2 + \ln x - x - e^x + \frac{e}{2} + 1 \leq 0$, 令 $h(x) = \frac{e}{2}x^2 + \ln x - x - e^x + \frac{e}{2} + 1$, $h(1) = 0$, $h'(x) = ex - e^x + \frac{1}{x} - 1$,

令 $m(x) = ex - e^x + \frac{1}{x} - 1$, $m'(x) = e - e^x - \frac{1}{x^2}$,

令 $p(x) = e - e^x - \frac{1}{x^2}$, $p'(x) = -e^x + \frac{2}{x^3}$, $y = -e^x$ 与 $y = \frac{2}{x^3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $p'(x) = -e^x + \frac{2}{x^3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $p'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{e} + 16 > 0$, $p'(1) = 2 - e < 0$,

所以存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $p'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = \frac{2}{x_0^3}$,

所以 $x \in (0, x_0)$, $p'(x_0) > 0$, $x \in (x_0, +\infty)$, $p'(x_0) < 0$,

所以 $p(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $x \in (0, +\infty)$, $p(x) \leq p(x_0)$, $p(x_0) = e - e^{x_0} - \frac{1}{x_0^2} = e - \frac{2}{x_0^3} - \frac{1}{x_0^2} = \frac{ex_0^3 - x_0 - 2}{x_0^3}$,

令 $\varphi(x) = ex^3 - x - 2$, $\varphi'(x) = 3ex^2 - 1$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时 $\varphi'(x) > 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递增, 所以 $\varphi(x) < \varphi(1) = e - 3 < 0$,

所以 $x \in (0, +\infty)$, $p(x) < 0$, 所以 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$m(1) = 0$, $x \in (0, 1)$, $m(x) > 0$, $x \in (1, +\infty)$, $m(x) < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 综上所述 $a \leq \frac{e}{2}$.

以上各题的其他解法, 限于篇幅, 从略, 请酌情给分.

